

1. Étudier la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+n^2 t^2} dt$.

2. f désignant une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} , on pose, pour tout entier n non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n} f(t) dt$.

Étudier l'existence de I_n et calculer la limite de la suite (I_n) .

3. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$ et représenter son intégrale comme une somme de série. Même question avec la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

4. On pose, quand cela a un sens, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + t^3}$.

a. Prouver que f est continue sur \mathbb{R}^+ .

b. Exprimer simplement l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^3 + t^3}$ en fonction de $I_1 = \lambda = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.

c. f est-elle intégrable sur \mathbb{R}^+ ? Si oui, donner une expression de son intégrale.

d. Prouver que $\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$ et en déduire un calcul économique de λ (on calculera 2λ).

5. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de complexes telles que la suite $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ tende vers 0 pour tout réel x .

a. Prouver que la suite (a_n) tend vers 0, ainsi que la suite $(b_n \sin nx)$ pour tout réel x .

b. On suppose la suite (b_n) bornée. Prouver alors que la suite d'intégrales $\left(\int_0^\pi |b_n \sin nt|^2 dt \right)$ tend vers 0. En

déduire que la suite (b_n) tend vers 0.

c. On ne suppose plus la suite (b_n) bornée. En envisageant $\beta_n = \inf(1, |b_n|)$, prouver que le résultat de la question précédente reste vrai.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note λ_n la longueur de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$.

a. Donner une formule intégrale pour λ_n (ça figure quelque part dans votre cours), et vérifier que l'on a :

$$\lambda_n - n \int_0^1 t^{n-1} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+n^2 t^{2n-2}} + n t^{n-1}} = I_n.$$

b. Déterminer la limite de la suite (I_n) . En déduire la convergence de la suite (λ_n) , ainsi que la valeur de sa limite.

c. En quoi ce résultat était-il prévisible ?

7. Prouver que $\int_0^1 t^{-t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ (étrange similitude, non ?).

8. Soit $\sum a_n$ une série de complexes supposée absolument convergente. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

a. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle I quelconque.

On pose, pour tout entier n et tout réel positif t : $f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

b. Justifier que la suite (a_n) est bornée, et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .

c. Prouver que $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

d. Justifier que pour tout entier n , la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$.

e. Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

9*. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions *positives* et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} , qui converge simplement sur

I . On suppose que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur I .

a. On suppose que l'une des fonctions u_n n'est pas intégrable sur I . Prouver que S n'est pas intégrable sur I .

b. On suppose que les fonctions u_n sont toutes intégrables sur I mais que la série $\sum \int_I u_n$ est divergente.

Prouver que S n'est pas intégrable sur I .