LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ

Soit une équation polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de la forme :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 .$$

En posant $y = x + \dfrac{a_{n-1}}{n}$, on se ramène à une équation qualifiée de *réduite* en l'inconnue y, c'est-à-dire de la forme :

$$y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \ldots + b_1 y + b_0 = 0 .$$

On peut donc, sans perte de généralité, ne s'intéresser qu'à la résolution des équations réduites.

L'équation du quatrième degré

Soit une équation réduite du quatrième degré : $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

Introduisons une variable t qui sera choisie plus tard, et réécrivons l'équation sous la forme :

$$(E) : \ x^4 + 2tx^2 + t^2 = (-a+2t)x^2 - bx + t^2 - c .$$

Le terme de gauche est un carré parfait. Le terme de droite, quant à lui, est un trinôme du second degré en x. Si l'on choisit t de telle sorte que le discriminant de ce trinôme soit nul, alors il sera lui-aussi un carré parfait (à une constante multiplicative près). L'équation (E) se réduit alors à un carré (d'un polynôme de degré 2 en x) égal à un autre carré (d'un polynôme de degré 1 en x), et l'on peut donc résoudre (E) en résolvant deux équations du second degré.

Mais $\Delta = b^2 - 4(t^2 - c)(-a+2t)$, et choisir t pour que Δ soit nul revient à résoudre une équation du troisième degré en t, ce que l'on va précisément apprendre à faire dans le paragraphe suivant !

Ainsi, et même si les calculs que cela suppose deviennent assez vite délirants, l'équation du quatrième degré est virtuellement résolue.

La nécessité de se placer dans $\mathbb{C}$

Comme on va le voir, l'idée centrale de la méthode de résolution de l'équation du troisième degré est de chercher ses racines sous la forme $u+v$ en imposant une condition appropriée à la valeur du produit uv. Or cela nécessite de pouvoir trouver u et v à partir de la connaissance de $u+v$ et de uv, donc de résoudre une équation du second degré. Mais, si l'on se cantonne à $\mathbb{R}$, cette équation du second degré possède de sérieuses chances de ne pas avoir de racine réelle (imaginer ce qui se passe si la racine à déterminer vaut 0 et qu'on la cherche sous la forme $u+v$: si l'on impose la condition $uv=1$, les équations $u+v=0$ et $uv=1$ seront incompatibles dans $\mathbb{R}$ pour de simples questions de signe !).

Cela explique que, même pour résoudre des équations du troisième degré réelles, le cadre de travail naturel soit $\mathbb{C}$. Et d'ailleurs, c'est précisément pour résoudre ces équations de degré 3 que les Italiens ont inventé les nombres *imaginaires* au XVI$^{\text{ème}}$ siècle.

L'équation du troisième degré

Soient p et q deux complexes, et l'équation réduite (E) : $z^3 + pz + q = 0$.

Cherchons ses racines sous la forme $z = u+v$ avec u et v dans $\mathbb{C}$. Cela s'écrit :

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 ,$$

ou encore :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 .$$

Imposons la condition $uv=-\frac{p}{3}$. Alors $z=u+v$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Attention alors à ne pas élever brutalement au cube : l'application $x\mapsto x^3$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$! Le système précédent est donc équivalent à :

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

On trouve alors u^3 et v^3 par résolution de l'équation du second degré $X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0$, ce qui donne u et v à un facteur multiplicatif 1, j ou j^2 près, donc trois valeurs pour u et trois valeurs pour v... mais la condition que l'on a gardée sur la valeur du produit uv permet de ne sélectionner qu'une valeur de v par valeur de u. Finalement, on trouve trois valeurs de u et pour chacune une seule valeur de v, on a trouvé nos trois racines de l'équation du troisième degré.

Exemple

Soit à résoudre l'équation $x^3+x-2=0$. Par stricte monotonie sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto x^3+x-2$, cette équation possède une unique racine réelle (que nous noterons α), et deux racines complexes conjuguées. C'est α que nous cherchons à déterminer ici.

Écrivons $\alpha=u+v$. On veut $(u+v)^3+(u+v)-2=0$, soit $u^3+v^3+3uv(u+v)+(u+v)-2=0$. On impose donc la condition $3uv=-1$ et l'on a donc $\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Les complexes u^3 et v^3 sont donc racines du trinôme $X^2-2X-\frac{1}{27}$, ce qui donne par exemple (quitte à permuter u et v) :

$$u^3=1+\sqrt{\frac{28}{27}} \quad \text{et} \quad v^3=1-\sqrt{\frac{28}{27}}.$$

La condition sur le produit uv impose que celui-ci soit réel, ce qui permet de faire le bon choix de v quand on a choisi u. Finalement, on a :

$$\alpha=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

Les deux racines complexes conjuguées sont, quant à elles :

$$\beta=\mathrm{j}\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\mathrm{j}^2\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}} \quad \text{et} \quad \beta'=\mathrm{j}^2\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\mathrm{j}\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

Remarque finale : les plus perspicaces auront remarqué que la racine réelle de l'équation proposée n'est autre que 1 ! On en déduit l'égalité non triviale :

$$1=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

On retiendra donc que cette méthode (dite de Cardan-Bombelli) de résolution de l'équation du troisième degré ne livre pas les racines évidentes, quand il y en a, sous une forme permettant de les reconnaître !