PRÉPARATION A L'ORAL

1. **a.** Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier p le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est-il maximum ?

b. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}$.

2. Trouver toutes les fonctions f continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$.

3. Déterminer (si possible !) un élément d'ordre 10 dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Même question avec un élément d'ordre 4, d'ordre 5.

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, et a un réel tel que $f'(a) \neq 0$.

a. Prouver qu'il existe un voisinage V de a tel que, pour tout x de V différent de a, on ait $f(x) \neq f(a)$.

b. Prouver que si l'on suppose en outre f de classe $\mathcal{C}^1$, il existe un voisinage V de a sur lequel f est injective.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} A = \operatorname{tr} A = 1$. Montrer que A est diagonalisable, puis que A est une matrice de projection.

6. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right)$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0} (\tan x)^{\tan 2x}$ **c.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ **d.** $\lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{\ln x}{\ln |x-2|} \right|^{\frac{1}{x-1}}$ $(a = 1, +\infty)$

7. **a.** Déterminer la suite de réels (u_n) telles que :

$$u_0 = u_1 = 2 \ ; \ \forall\, n \geq 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n .$$

b. Étudier la série $\sum \sin(1+\sqrt{2})^n \pi$.

8. Soit n un entier non nul. Calculer modulo 5 la partie imaginaire du complexe $(3+4\mathrm{i})^n$. Que peut-on en déduire à propos du complexe $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}$?

9. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} \left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \ldots + \sqrt{(n-1)1} \right)$.

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser les parties entières de ses valeurs propres.

b. On pose $t_n = \operatorname{tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de t_{n-1}, t_{n-2} et t_{n-3}.

c. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum t_n z^n$.

11. Étudier les extrema locaux de $f(x,y) = x^3 y^2 (1-x-y)$.

12. Une urne contient deux types de bons : sur les uns est inscrit « bon pour un Château Lafite-Rothschild 1961 » et sur les autres figure « bon pour un vin des différents pays de la Communauté Européenne ». La proportion de bons pour le Château Lafite est $p \in]0,1[$. Un individu lambda, que nous nommerons Frédéric, tire dans l'urne avec remise jusqu'à obtenir un bon pour le Château Lafite pour la première fois. On note N le nombre de lancers nécessaires. Dans un deuxième temps, Frédéric pioche N fois dans l'urne et compte le nombre X de Lafite obtenus.

a. Préciser la loi de N, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$.

b. Déterminer la loi du couple (N, X).

c. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance.

---

13. Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t \, \mathrm{d}t$ existe, et que la fonction f ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^*$ y est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner un équivalent de f en 0.

---

14. Étudier la série de fonctions $\sum \ln(1 + \frac{x}{n^2})$ (domaine de convergence simple, continuité, dérivabilité de la somme, limite aux bornes).

---

15. Justifier l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{x(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$ et déterminer la limite de la suite (I_n) pour $n \to +\infty$.

---

16. La matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Prouver l'existence d'une infinité de matrices réelles R telles que $R^2 = A$.

---

17. Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0.

a. Donner une condition nécessaire pour que la série $\sum f(\frac{1}{n})$ soit convergente.

b. Cette condition est-elle suffisante dans le cas général ? Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$?

---

18. Pour tout triplet de réels (a, b, c), on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Montrer que les matrices $M(a, b, c)$ commutent entre elles, et peuvent se diagonaliser au moyen d'une même matrice de passage.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle matrice soit une matrice orthogonale. Décrire alors l'isométrie dont elle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté.

---

19. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Calculer la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$

---

20. Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
