PRÉPARATION À L'ORAL

1. Soient n et p deux entiers non nuls.

a. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

b*. Déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

---

2. Soit n un entier strictement positif, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A - I_n = 0$.

a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b. Prouver que $\det A > 0$.

---

3. **a.** Étudier, pour $x \in \mathbb{R}$, l'existence de l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

b. Prouver, quand $f(x)$ existe, que $f(x) = \Gamma(x+1)\zeta(x+1)$ (on pourra utiliser une série géométrique).

---

4. Prouver que trois complexes x, y et z vérifiant $x + y + z = 0$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ ont même module.

---

5. Prouver que $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe pour tout x de $]0,+\infty[$. En déterminer les limites en $+\infty$ et en 0 (on pourra, pour cette dernière limite, introduire l'intégrale $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$ ... ou donner une autre méthode).

---

6. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}}.$$

---

7. On pose, quand c'est possible, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n}$.

a. Donner la plus grande partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^+$ sur laquelle f est définie.

b. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

c. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} f$ est-elle convergente ?

---

8. Soit $u_n = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$. Étudier la série de terme général u_n.

---

9. Soit (a_n) une suite de complexes.

a. Prouver que si (a_n) est convergente de limite ℓ, alors $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ell$.

b. Examiner la réciproque.

---

10. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

a. Prouver que AA^{T} et $A^{\mathrm{T}}A$ ont le même polynôme caractéristique.

b. En déduire que ces deux matrices sont semblables.

c. Prouver que le résultat de la question **b.** reste vrai en ne supposant plus A inversible.

11. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On tire au hasard une boule. Si celle-ci est blanche, le jeu s'arrête. Si elle est noire, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule noire. Puis on recommence. Déterminer la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas.

12. Calculer les limites des deux suites suivantes :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin\frac{1}{n} + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin\frac{1}{n} + t}\,\mathrm{d}t\,.$$

13. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

a. Donner la loi de Y_k, son espérance et sa variance.

b. Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.

c. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.

14. Donner la signature de σ et calculer σ^{2023}, où σ désigne la permutation suivante de $\mathcal{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 & 5 & 6 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Pour f dans l'espace E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\|f\| = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

a. Prouver $\|\ \|$ définit une norme sur E, et que pour tout f de E, $n_\infty(f) \leq \sqrt{2}\,\|f\|$.

b. Soit k une constante positive telle que $n_\infty(f) \leq k\|f\|$ pour tout f de E. En envisageant les fonctions de la forme $t \mapsto 1 + at$ avec $a > 0$, prouver que $k \geq \sqrt{2}$.

c. $\|\ \|$ et n_∞ sont-elles équivalentes ?

15. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{t\in[0,1/2]} |P(t)|$.

a. Prouver que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b. On définit une suite de polynômes en posant $P_0 = 1$ et $\forall\, n \geq 1,\ P_n = X^n - X^{n-1}$. Prouver que la série $\sum P_n$ converge et calculer sa somme.

c. Prouver que la famille (P_n) est libre. Conclusion ?

16. **a.** Quel lien existe-t-il entre $\arctan x - \arctan y$ et $\arctan\frac{x-y}{1+xy}$?

b. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \arctan\frac{1}{n^2+n+1}$