PRÉPARATION À L'ORAL (3)

1. **a.** Déterminer le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$ (on pourra, mais ce n'est pas indispensable, commencer par le cas où les entiers m et n sont premiers entre eux).

b. On divise n par m : $n = mq + r$, $0 \leq r < m$, et on écrit l'évidence : $X^n - 1 = (X^{mq} - 1)X^r + X^r - 1$. Expliquer en quoi cela permet de retrouver à peu de frais le résultat de la question **a.**.

c. Quelle est la supériorité de la preuve **b.** sur la preuve **a.** ?

---

2. Soit E un espace euclidien. Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, on pose $N(u) = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$ et on note u^* l'adjoint de u.

a. Montrer que $N(u) = \sup\limits_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} (u(x)|y)$ En déduire que $N(u) = N(u^*)$.

b. Exprimer $N(u)$ en fonction des valeurs propres de $u^* \circ u$, et retrouver le résultat précédent.

c. On suppose dans cette question que $N(u) \leq 1$.

Montrer que si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1, x est aussi vecteur propre de u^* associé à la valeur propre 1. Montrer alors que $E = \ker(u - Id) \oplus \operatorname{Im}(u - Id)$.

d. Soient a, b, x trois vecteurs de E, x non nul. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe u dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $u(x) = a$ et $u^*(x) = b$.

---

3. Résoudre l'équation $a^b = b^a$ où a et b sont deux entiers distincts.

---

4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

a. Prouver l'existence de deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq ax + b$.

b. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Prouver que f tend vers 0 en $+\infty$.

---

5. Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}.$$

---

6. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\dfrac{\sigma(n)}{n}$ ait une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$. Que dire de ℓ ?

---

7. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On souhaite prouver que E n'est pas la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E distincts de E. Pour cela, on raisonne par récurrence sur le nombre de ces sous-espaces.

a. Prouver que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

b. Prouver que l'on peut supposer que les sous-espaces envisagés sont tous des hyperplans.

c. Soient $H_1, \ldots, H_{k+1}$ $k+1$ hyperplans, x un vecteur de E qui n'est pas dans $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i$, y un vecteur de E qui n'est pas dans H_{k+1}. Prouver que le vecteur $\lambda x + y$ n'est dans tous les H_i que pour un nombre fini de valeurs de λ, et conclure.

---

8. On note X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a. Montrer que $P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$, puis que $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

b. On note G_X la fonction génératrice de X. Montrer que pour $t \geq 1$ et $a > 0$, on a $P(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq (\dfrac{e}{4})^\lambda$.

c. Comparer les inégalités obtenues aux questions **a.** et **b.**.

---

9. Deux pylônes électriques de 100m de haut distants de 500m sont reliés par un câble de 501m de long. Quelle est l'altitude du point le plus bas du câble ?

---

10. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(A+M) = \det M$ pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que $A = 0$.

---

11. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$. Prouver l'existence d'une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\dfrac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y} = g$.

---

12. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On dit que f est logarithmiquement-convexe (en abrégé *l-cv*) si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

a. Prouver qu'une fonction *l-cv* est convexe.

b. On suppose f deux fois dérivable sur I. Prouver que f est *l-cv* si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(x)t^2 + 2f'(x)t + f''(x) \geq 0.$$

En déduire que la somme de deux fonctions *l-cv* deux fois dérivables est encore une fonction *l-cv*.

---

13. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ telle que f' soit sommable sur $[a,+\infty[$. Pour n entier assez grand, on pose $d_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$.

a. Prouver que $d_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t$. En déduire la convergence absolue de la série $\sum d_n$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum f(n)$.

c. Étudier la convergence des séries $\sum \dfrac{\cos \ln n}{n}$ et $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

---

14. **a.** Soit G un groupe fini de cardinal pair. Prouver que l'ensemble des x tels que $x^2 \neq e$ est de cardinal pair. En déduire qu'il existe dans G au moins un élément d'ordre 2.

b. Soit G un groupe fini de cardinal impair. Prouver que pour tout x de G, il existe y unique dans G tel que $x = y^2$.

---

15. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln n\, x^n$ et donner un équivalent de sa somme au voisinage de 1.

---

16. Prouver qu'un entier de la forme $4^a(8n+7)$ n'est jamais somme de trois carrés.
