XMP 2022-2023

PRÉPARATION À L'ORAL (4)

---

1. On munit l'espace E des fonctions continues sur $[-1,1]$ du produit scalaire (?) défini par :

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver, pour tout entier n, l'existence d'un polynôme Q_n, unique, tel que pour tout réel x, $Q_n(\cos x) = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$.

b. Calculer $(Q_p|Q_q)$ (les Q_n sont dits « polynômes de Tchebychev de seconde espèce »).

c. Quel intérêt peut-il y avoir, dans le cadre de l'approximation des fonctions, à envisager ce produit scalaire-ci, plutôt que le produit scalaire plus « standard » $\displaystyle\int_{-1}^{1} fg$?

---

2. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On envisage une fonction dérivable z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) \leq a(t)z(t) + b(t)$. Soit alors y la solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ satisfaisant à $y(0) = z(0)$. Prouver que $\forall t \geq 0,\ z(t) \leq y(t)$ (*indication :* envisager la fonction $\mathrm{e}^{-A}(y-z)$ où A est une primitive de a).

---

3. Déterminer tous les sous-groupes finis du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$.

---

4. Soit u un automorphisme d'un espace euclidien E. Prouver l'existence d'une base orthonormée de E qui, par u, est transformée en base orthogonale.

---

5. Soient n et p deux entiers non nuls, et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Étudier dans $\mathbb{R}[X]$ la liberté de la famille $\big((X-a_0)^p, \dots, (X-a_n)^p\big)$.

---

6. Soit u un endomorphisme de E euclidien, vérifiant $\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$.

Montrer que $\forall x,y \in E,\ (u(x)|y) = -(x|u(y))$ pour tous x et y, que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, et que le rang de u est pair (on pourra calculer le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair).

---

7. On note X une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a. Montrer que $P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$, puis que $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

b. On note G_X la fonction génératrice de X. Montrer que pour $t \geq 1$ et $a > 0$, on a $P(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq (\dfrac{\mathrm{e}}{4})^{\lambda}$.

c. Comparer les inégalités obtenues aux questions **a.** et **b.**.

---

8. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x(x^2-1)y' + 2y = x^4$.

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence

9. *Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.*

Soit P un polynôme complexe non constant, supposé ne pas posséder de racines dans $\mathbb{C}$. Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose $f(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

a. Prouver que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer explicitement f'.

b. déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Conclure.

9. Soit la suite (a_n) donnée par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ \ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

a. Prouver que $\forall n \geq 1,\ \ 1 \leq a_n \leq n^2$. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

b. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la somme f de cette série entière, puis calculer f.

10. E désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0.

Pour f dans E, on pose $N(f) = n_\infty(f + f')$ et $\|f\| = n_\infty(f) + n_\infty(f')$.

Prouver que l'on définit ainsi deux normes sur E et prouver qu'elles sont équivalentes (on pourra envisager la fonction $g(x) = f(x)e^x$ pour comparer $n_\infty(f)$ à $N(f)$).

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes de E.

a. Prouver que $\ker u \subset \ker v$ si et seulement si il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = w \circ u$.

b. Énoncer et démontrer un résultat analogue en termes d'images.

12. Étudier la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{\arctan n}{\arctan(n+1)}\right)^{n^\alpha}$.

13. Soit k un réel positif, et f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0,\ |f'(x)| \leq k|f(x)|$. On fixe un réel positif a, et on note M un majorant de $|f|$ sur le segment $[0,a]$.

Donner une nouvelle majoration de $|f(x)|$ pour x élément du segment $[0,a]$ puis, en réitérant ce processus, prouver que f est nulle.

14. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est-il stable pour la somme ? pour le produit ?

b. Prouver que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Prouver que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ n'est pas ouvert.

15. Un étang contient un nombre inconnu x de poissons, $x \geq r$. On prélève r poissons que l'on marque puis que l'on remet à l'eau. Quelques jours plus tard, on prélève n poissons (avec remise à l'eau) dans ce même étang. On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour ces n poissons.

Soit X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de n poissons associe le nombre de poissons marqués. Quelle est la loi de X ? Comment choisir x pour que, à k fixé, la probabilité $P(X = k)$ soit maximale ?