CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
FILIÈRE MP

BANQUE
ÉPREUVE ORALE
DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2016

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence

Introduction

L'épreuve orale de mathématiques des CCP, filière MP, se déroule de la manière suivante :
- 25mn de préparation sur table.
- 25mn de passage à l'oral.

Chaque sujet proposé est constitué de deux exercices :
- un exercice sur 8 points issu de la banque publique accessible sur le site http://ccp.scei-concours.fr
- un exercice sur 12 points.

Les deux exercices proposés portent sur des domaines différents.

Ce document contient les 112 exercices de la banque pour la session 2015 :
- 58 exercices d'analyse (exercice 1 à exercice 58).
- 37 exercices d'algèbre (exercice 59 à exercice 94).
- 18 exercices de probabilités (exercice 95 à exercice 112).

L'équipe des examinateurs de l'oral de mathématiques des CCP, filière MP.
Contact : Valérie BELLECAVE, coordonnatrice
des oraux de mathématiques des CCP, filière MP.
vbellecave@gmail.com

Lien

Vous trouverez le document pdf regroupant les énoncés de ces exercices ainsi que leur corrigé sur le site de la MP de Valence, http://f-dupre-mp.wifeo.com/, à la page Exercices.

BANQUE ANALYSE

Exercice 1.

a. On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$. Prouver que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$.

Exercice 2.

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

a. Décomposer *f* en éléments simples.

b. En déduire que *f* est développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-r, r[$ ($r > 0$).
Déterminer ce développement en série entière de *f* et préciser son domaine de validité.

c. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $g(x)$. Exprimer pour tout entier *p* le coefficient a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
En déduire le développement limité de *f* à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 3.

On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

a. Calculer, pour tout entier *k*, les dérivées d'ordre *k* des fonctions *g* et *h* sur leur ensemble de définition.

b. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée *n*-ième d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel *n* et tout réel $x \neq -1$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

c. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz utilisée à la question précédente.

Exercice 4.

a. Énoncer le théorème des accroissements finis.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose *f* continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$ sauf peut-être en x_0. Démontrer que si f' admet une limite en x_0, alors *f* est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

c. Prouver que l'implication (*f* dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' possède une limite en x_0) est fausse (*indication* : on pourra considérer la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).

Exercice 5.

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Cas $\alpha \leq 0$: en utilisant une minoration simple de u_n, démontrer que la série diverge.

b. Cas $\alpha > 0$: en utilisant la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$, étudier la série.

c. Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 6.

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, et a un réel élément de $[0,1[$.

a. Démontrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to a$, alors la série $\sum u_n$ converge (*indication* : majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une série géométrique).

b. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 7.

a. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. On suppose que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, et que $u_n \sim v_n$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b. Étudier la série $\sum \dfrac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^3+1}-1)\ln n}$, i désignant le complexe de carré égal à -1.

Exercice 8.

a. Soit (u_n) une suite de réels positive, décroissante, et de limite nulle. Démontrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente, et donner une majoration de la valeur absolue de son reste d'ordre n (*indication* : on pourra raisonner sur les suites des sommes partielles d'ordres pairs et impairs).

b. On pose, pour tout entier n non nul et tout réel x : $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum f_n$, puis sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 9.

a. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers g.

b. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$, sur $[a,+\infty[$ ($a > 0$), sur $]0,+\infty[$?

Exercice 10.

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

a. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 11.

a. Soit X un ensemble, et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ convergeant simplement sur X vers une certaine fonction f. On suppose l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))$ ne tende pas vers 0. Prouver que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de la suite (f_n), sa convergence uniforme sur $]a,+\infty[$ ($a>0$) puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 12.

a. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f. On suppose que les f_n sont continues en $x_0\in[a,b]$. Prouver que f est continue en x_0.

b. On pose $\forall x\in[0,1],\ g_n(x)=x^n$. La suite (g_n) est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$?

Exercice 13.

a. Soit X un ensemble, et (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ convergeant uniformément vers une certaine fonction g. On suppose que chaque fonction g_n est bornée. Prouver que g est bornée.

b. Pour tout entier non nul n, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=n^2x$ si $|x|\leq\dfrac{1}{n}$ et $f_n(x)=\dfrac{1}{x}$ sinon. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).

Exercice 14.

a. Soit (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que si (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t)$ converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

b. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

c. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{1/2}(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Exercice 15.

a. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Rappeler les définitions de la convergence normale et de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

b. Prouver que la convergence normale entraine la convergence uniforme.

c. La série $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R > 0$?

Exercice 16.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], u_n(x) = \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$. En cas de convergence, sa somme sera notée *S*.

a. Prouver que *S* est définie et dérivable sur $[0,1]$.

b. Calculer $S'(1)$.

Exercice 17.

a. Soit *A* une partie de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de *A* dans $\mathbb{C}$. Prouver l'implication :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément $\Rightarrow$ la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0.

b. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Cette convergence est-elle uniforme ?

Exercice 18.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

a. Étudier le domaine *D* de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

b. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série de fonctions sur *D*.

c. La somme *S* de cette série de fonctions est-elle continue sur *D* ?

Exercice 19.

a. Prouver que pour tout entier *n*, la fonction $t \mapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t \, \mathrm{d}t$.

b. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, prouver que la fonction est intégrable sur $]0,1]$ et que $\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, n!}$.

Exercice 20.

a. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière complexe $\sum a_n z^n$.

b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum n^{(-1)^n} z^n$, $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ et $\sum \cos n \, z^n$.

Exercice 21.

a. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière complexe $\sum a_n z^n$.

b. Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

c. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) z^n$.

Exercice 22.

a. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

b. Développer en série entière, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.

c. La série obtenue converge-t-elle pour $x=\frac{1}{4}$? $x=\frac{1}{2}$? $x=-\frac{1}{2}$?

Exercice 23.

a. Soit (a_n) une suite complexe telle que la suite $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})$ admet une limite.

Prouver que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence (noté R).

b. Démontrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$.

Exercice 24.

a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$; on note $S(x)$ sa somme.

b. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et préciser le rayon de convergence.

c. Déterminer $S(x)$.

d. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0)=1,\quad f(x)=\operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x} \text{ si } x<0.$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.

a. Montrer que pour tout entier n, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b. On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \mathrm{d}t$. Déterminer $\lim_{n\infty} u_n$.

Exercice 26.

a. Pour tout entier non nul n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Justifier l'existence de I_n .

b. Étudier la monotonie de la suite (I_n) et déterminer sa limite.

c. Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n I_n$.

Exercice 27.

Pour tout entier non nul n, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

b. Soit $a \in]0,1[$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$? sur $[0,1]$?

c. Trouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice 28.

Les deux questions sont indépendantes.

a. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

b. Soit a un réel strictement positif. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1+t^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 29.

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$: $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

a. Démontrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$. Démontrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c. Prouver que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'une intégrale.

Exercice 30.

a. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

b. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(2tx)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre dont f est solution, puis intégrer cette équation différentielle.

Exercice 31.

a. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 32.

Soit l'équation différentielle $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

a. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur $]-r,r[$ avec $r>0$.

b. Déterminer la somme des séries entières obtenues.

c. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Exercice 33.

On pose $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, et $f(0,0)=0$.

a. Prouver que *f* est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Prouver que *f* admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

c. *f* est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 34.

Soit *A* une partie non vide d'un espace vectoriel normé *E*.

a. Rappeler la définition d'un point adhérent à *A*, en termes de voisinages ou de boules.

b. Démontrer que : $x\in\overline{A}\Leftrightarrow$ x est limite d'une suite convergente de points de *A*.

c. Démontrer que si *A* est un sous-espace vectoriel de *E*, alors $\overline{A}$ en est un aussi.

d. Démontrer que si *A* est convexe, alors $\overline{A}$ l'est aussi.

Exercice 35.

E et *F* désignent deux espaces vectoriels normés.

a. Soit *f* une application de *E* dans *F* et *a* un point de *E*. Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. *f* est continue en *a*.

ii. Pour toute suite (x_n) de points de *E* convergeant vers *a*, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

b. Soit *A* une partie dense de *E*, et *f* et *g* deux fonctions continues sur *E* telles que $f(x)=g(x)$ pour tout *x* de *A*. Prouver que $f=g$.

Exercice 36.

Soient *E* et *F* deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.

a. Soit *u* une application linéaire de *E* dans *F*. Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i. *u* est continue sur *E*.

ii. *u* est continue en 0_E.

iii. $\exists k\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in E,\ \|u(x)\|_F\leq k\|x\|_E$.

b. On munit l'espace *E* des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ de la norme définie par $n_\infty(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$, et on envisage l'application *u* de *E* dans $\mathbb{R}$ définie par $u(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que *u* est linéaire et continue.

Exercice 37.

Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$. On pose, pour f dans E :

$$n_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad n_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

a. Prouver que n_∞ et n_1 définissent deux normes sur E.

b. Expliciter une constante k telle que $n_1(f) \leq k\, n_\infty(f)$ pour tout f de E.

c. Démontrer que tout ouvert pour la norme n_1 est ouvert pour la norme n_∞.

d. Démontrer que n_1 et n_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 38.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels.

a. Pour $P \in E$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{k=0,\ldots,n} |a_k|$.

Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est ouvert pour la norme N_1.

c. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

d. On fixe un entier k et l'on note $N_{1,k}$ et $N_{\infty,k}$ les restrictions de N_1 et de N_∞ au sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k. Les normes $N_{1,k}$ et $N_{\infty,k}$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 39.

On note l^2 l'ensemble des suites (x_n) de réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

a. Prouver que pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans l^2, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

b. Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites de réels, et que $(\ ,\ )$ définit un produit scalaire sur l^2.

c. On munit l^2 de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x = (x_n)$ dans l^2, on pose $\varphi(x) = x_p$. Prouver que l'application φ ainsi définie est linéaire continue.

d. On considère le sous-ensemble F des suites réelles presque nulles (c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang). Déterminer $F^\perp$, puis comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 40.

Soit A une algèbre normée de dimension finie dont la norme vérifie $\|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$ pour tous u et v de A. On note e l'élément unité de A.

a. Soit $u \in A$ tel que $\|u\| < 1$. Prouver que la série $\sum u^n$ converge. Prouver que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

b. Prouver, pour tout u de A, la convergence de la série $\sum \frac{u^n}{n!}$.

Exercice 41.

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$. Les théorèmes utilisés peuvent être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques : On utilisera au moins une fois des suites ; on pourra utiliser une fois au plus le passage au complémentaire ; ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 42.

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \quad ; \quad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}\ .$$

a. Résoudre (H) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 43.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ On définit une suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est monotone, et déterminer sa monotonie en fonction du signe de x_0.

b. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

c. Déterminer toutes les fonctions continues *h* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

Exercice 44.

Soient *A* et *B* deux parties d'un espace vectoriel normé *E*.

a. Rappeler la définition de l'adhérence d'une partie de *E*.

b. Prouver que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

c. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*Remarque :* une réponse sans les suites est aussi acceptée).

d. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, et que cette inclusion peut être stricte (on prendra $E = \mathbb{R}$).

Exercice 45.

Soit *E* un espace vectoriel normé, et *A* une partie non vide de *E*.

a. Rappeler la définition séquentielle de l'adhérence de *A*.

b. Prouver que si *A* est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

On pose, pour tout *x* de *E*, $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

c. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.

d. On suppose que *A* est fermée et que $\forall x, y \in E,\ \forall t \in [0,1],\ d_A(tx + (1-t)y) \le t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$. Prouver que *A* est convexe.

Exercice 46.

On considère la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$.

a. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ où α est un réel que l'on déterminera.

b. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

c. Cette convergence est-elle absolue ?

Exercice 47.

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer son rayon de convergence et sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

a. $\sum 3^n \dfrac{x^{2n}}{n}$.

b. $\sum a_n x^n$ avec $a_{2n} = 4^n$ et $a_{2n+1} = 5^{n+1}$.

Exercice 48.

$E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit *f* un élément de *E* tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0 .$$

a. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

b. Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$. Prouver que la suite $(P_n f)$ converge uniformément vers f^2.

c. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t)\mathrm{d}t$, et calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t) f(t)\mathrm{d}t$.

d. En déduire que *f* est la fonction nulle.

Exercice 49.

Soit $\sum a_n$ une série de complexes supposée absolument convergente. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

a. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle *I* quelconque.

On pose, pour tout entier *n* et tout réel positif *t* : $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

b. Justifier que la suite (a_n) est bornée, et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

c. Prouver que $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

d. Justifier que pour tout entier *n*, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$.

e. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 50.

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

a. Prouver que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

c. Donner un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 51.

a. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ est convergente.

On se propose de calculer la somme de cette série.

b. Donner le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ (on exprimera les coefficients avec des factorielles) et préciser son rayon de convergence.

c. En déduire le développement en série entière de $\arcsin x$.

d. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercice 52.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a. Prouver que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

b. Quel est le domaine de définition de f ? Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et les calculer.

Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leurs valeurs.

d. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 53.

On considère, pour tout entier non nul n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$.

a. Prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est désormais notée $f(x)$.

b. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$? sur $[0,+\infty[$?

c. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

d. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 54.

Soit E l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

a. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

On pose, pour $u=(u_n)\in E$, $\|u\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

b. Prouver que $\|.\|$ est une norme sur E.

c. Prouver que pour tout u de E, la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge. On note $f(u)$ la somme de cette série.

d. Prouver que l'application $u \mapsto f(u)$ est continue sur E.

Exercice 55.

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites (u_n) de complexes telles que :

$$\forall\, n \geq 0,\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n .$$

a. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites complexes. Donner, en la justifiant, la dimension de E.

b. On considère dans cette question la suite de E telle que $u_0 = u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier n, la valeur de u_n en fonction de n (*indication* : discuter suivant les valeurs de a).

Exercice 56.

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

a. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b. Montrer que la fonction u définie sur $]1,+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ possède une limite finie en 1.

c. En utilisant cette fonction u, déterminer la limite de H en 1^+ .

Exercice 57.

a. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner, avec des quantificateurs, la définition de la continuité de f au point $(0,0)$.

b. Donner la définition de "f est différentiable en $(0,0)$ ".

On considère la fonction définie par $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

c. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

d. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 58.

a. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, f une application de E dans F et a un élément de E. Donner la définition de "f est différentiable en a".

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. On pose, pour $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$. De même, pour $(x,y)\in E\times E$, on pose $\|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$. On rappelle que les applications ainsi définies définissent des normes sur E et sur $E\times E$. Soit $B : E\times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

b. Prouver l'existence d'une constante réelle C telle que $\forall (x,y)\in E\times E, |B(x,y)| \le C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

c. Montrer que B est différentiable sur $E\times E$ et donner sa différentielle en un point (u_0,v_0) de $E\times E$.

BANQUE ALGÈBRE

Exercice 59.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n\in\mathbb{N}^*$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(P)=P-P'$.

a. Prouver que f est bijectif de deux manières : en utilisant une matrice de f, puis sans matrice.

b. Soit $Q\in E$. Trouver P tel que $f(P)=Q$ (*indication* : si $P\in E$, que vaut $P^{(n+1)}$?).

c. f est-il diagonalisable ?

Exercice 60.

Soit la matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M)=AM$.

a. Déterminer une base de $\ker f$.

b. f est-il surjectif ?

c. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

d. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\ker f\oplus\operatorname{Im} f$?

Exercice 61.

Pour $A=[a_{i,j}]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\|=\sup\limits_{1\le i,j\le n}\left|a_{i,j}\right|$.

a. Prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Prouver que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|AB\|\le n\|A\|\,\|B\|$, puis que pour tout entier $p\ge 1$, on a $\left\|A^p\right\|\le n^{p-1}\|A\|^p$.

c. Démontrer que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum\frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

Exercice 62.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphismes de E tel que $f^2-f-2Id_E=0$.

a. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

b. Démontrer que $E=\ker(f+Id_E)\oplus\ker(f-2Id_E)$:

i. en utilisant le lemme des noyaux ;

ii. sans lemme des noyaux.

c. On suppose dans cette question que E est de dimension finie. Prouver alors que $\operatorname{Im}(f+Id_E)=\ker(f-2Id_E)$.

Exercice 63.

Soit n un entier plus grand que 1, et A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. On note D_n le déterminant de la matrice A_n. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

b. Calculer D_n.

c. Prouver que la matrice A_n est diagonalisable. 0 en est-il valeur propre ?

Exercice 64.

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie E.

a. Prouver que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

b. Prouver que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

c. Prouver que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

Exercice 65.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *E*.

a. Prouver que $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

b. Prouver que $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

c. Prouver que (P est un polynôme annulateur de u) $\Rightarrow$ (PQ est un polynôme annulateur de u).

d. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire que le polynôme $P = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 66.

On fixe un entier $p \geq 2$, et l'on considère la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = kp$. On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

a. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?

b. Donner soigneusement la définition de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; on justifiera que ces définitions sont cohérentes.

c. On admet que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni de ces opérations est un anneau. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Exercice 67.

Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 68.

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières différentes :

i. sans calcul ;

ii. en calculant directement $\det(\lambda I_3 - A)$ et en déterminant les sous-espaces propres ;

iii. en utilisant le rang de A ;

iv. en calculant A^2.

b. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien E dans une base orthonormée. Expliciter une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 69.

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer le rang de A.

b. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 70.

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

b. Soient a, b, c trois complexes et $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déduire de la question **a.** les éléments propres de B.

Exercice 71.

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

a. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

b. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 72.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et un vecteur v tels que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$.

a. Donner le rang de f.

b. f est-il diagonalisable ? (discuter suivant le vecteur v).

Exercice 73.

Soit $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de *A*.

b. Quelles sont les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$? En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec *A* est $\mathrm{vect}(I_2, A)$.

Exercice 74.

On considère la matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Justifier sans calcul que *A* est diagonalisable.

b. Déterminer les valeurs propres de *A* puis une base de vecteurs propres associés.

c. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x+2z \\ y' = y \\ z' = 2x+z \end{cases}$ où *x*, *y* et *z* désignent trois fonctions dérivables de la variable *t*. En utilisant la question **a.** et en le justifiant, résoudre ce système différentiel.

Exercice 75.

On considère la matrice $A=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Démontrer que *A* n'est pas diagonalisable.

b. On note *f* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à *A*. Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de *f* est de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$; on explicitera les réels *a*, *b* et *c*.

c. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x-4y \\ y' = x+3y \end{cases}$.

Exercice 76.

Soit *E* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ ,\ )$. Pour *x* dans *E*, on note $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

a. Énoncer et prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Étudier le cas d'égalité.

b. Soit *E* l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[a,b]$ telles que $\forall x \in [a,b],\ f(x) > 0$. Pour *f* dans *E*, on pose $P(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf_{f\in E} P(f)$.

Exercice 77.

Soit *E* un espace euclidien.

a. Soit *A* un sous-espace vectoriel de *E*. Prouver que $(A^\perp)^\perp = A$.

b. Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*. Prouver que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 78.

Soit E un espace euclidien de produit scalaire noté $(\ ,\ )$. Pour x dans E, on note $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

a. Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|x\|$. Prouver que u est bijectif et que $(u(x), u(y)) = (x, y)$ pour tout x et tout y de E.

b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

c. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 79.

a. Soit h une fonction continue positive sur $[a,b]$. Prouver que $\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow h = 0$.

b. Soit E l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

c. Majorer $\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 80.

Soit E l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $(f,g) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

b. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos 2x$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 81.

Pour A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$. On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose par ailleurs $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

a. Justifier que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer $C^\perp$.

c. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sur $C^\perp$.

d. Calculer la distance de J à C.

Exercice 82.

Soit E un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que pour tout x de E, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F. La distance de x à F vaut alors $\|x - y_0\|$.

Pour $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A'=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A,A')=aa'+bb'+cc'+dd'$.

a. Prouver que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Calculer la distance de la matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 83.

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

a. Soit λ un scalaire non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u\circ v$, alors λ est valeur propre de $v\circ u$.

b. On considère sur $\mathbb{R}[X]$ les endomorphismes $u : P \mapsto \int_1^X P(t)\mathrm{d}t$ et $v : P \mapsto P'$. Déterminer $\ker(v\circ u)$ et $\ker(u\circ v)$. Le résultat de la question **a.** subsiste-t-il pour $\lambda=0$?

c. Si E est de dimension finie, prouver que le résultat de la question **a.** reste vrai pour $\lambda=0$ (*indication* : penser à utiliser le déterminant).

Exercice 84.

a. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la preuve de l'existence d'un tel nombre).

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.

c. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n$ et montrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 85.

a. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$, et $a\in\mathbb{R}$. Donner sans démonstration la décomposition de P sur la base $(1, X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$.

b. Soit $r\in\mathbb{N}^*$. En déduire que a est racine de P de multiplicité r si et seulement si $P(a)=P'(a)=\dots=P^{(r-1)}(a)=0$ et $P^{(r)}(a)\neq 0$.

c. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double de $P=X^5+aX^2+bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 86.

Soit p un nombre premier.

a. Soient a, b et c trois entiers tels que $a\wedge c=b\wedge c=1$. Prouver que $(ab)\wedge c=1$.

b. Prouver que pour tout entier $k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis p divise $\binom{p}{k}$.

c. Prouver (par récurrence) que pour tout entier n, $n^p\equiv n\,[p]$. En déduire que si p ne divise pas n, $n^{p-1}\equiv 1\,[p]$.

Exercice 87.

Soient $a_0,a_1,\dots,a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

a. Prouver que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels, alors il existe un unique polynôme *P* de degré inférieur ou égal à *n* tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout *i* de $[\![0, n]\!]$.

b. Expliciter ce polynôme *P*, que l'on notera L_k, quand $b_k = 1$ et $b_i = 0$ si $i \neq k$.

c. Prouver que $\forall\, p \in [\![0, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 88.

a. Soit *E* un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Prouver que si *P* annule *u*, toute valeur propre de *u* est racine de *P*.

b. Pour $n \geq 2$, on désigne par *E* l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit *A* la matrice de *E* dont tous les termes sont égaux à 1, sauf ceux de la diagonale qui sont nuls. On pose par ailleurs, pour $M \in E$, $u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de *u*.
U est-il diagonalisable ? (on donnera deux justifications, dont une reposant sur la question **a.**).

Exercice 89.

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, et $z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

a. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.

b. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 90.

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes. Soient *a*, *b* et *c* trois éléments distincts de $\mathbb{K}$.

a. Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}^3 \\ P \mapsto (P(a), P(b), P(c)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et exprimer les polynômes L_k en fonction de *a*, *b* et *c*.

c. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Exprimer les coordonnées de *P* sur la base (L_1, L_2, L_3).

d. <u>Application</u> : soient les points $A(0,1),\ B(1,3),\ C(2,1)$ de $\mathbb{R}^2$. Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par ces trois points.

Exercice 91.

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Montrer que *A* n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
b. La matrice *A* est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
c. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de *A*.
d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. En déduire A^n.

Exercice 92.

Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A,B)=\mathrm{tr}({}^tAB)$.

a. Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n\oplus\mathcal{A}_n$, et que $\mathcal{S}_n^{\perp}=\mathcal{A}_n$.

c. Soit F l'espace des matrices diagonales. Déterminer $F^{\perp}$.

Exercice 93.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n>0$, et $u\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3+u^2+u=0$.

a. Montrer que $E=\ker u\oplus\mathrm{Im}\,u$.

b. Énoncer le lemme des noyaux. En déduire que $\mathrm{Im}\,u=\ker(u^2+u+Id_E)$.

c. On suppose u non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 94.

a. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

b. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Soit $c\in\mathbb{N}$. Prouver que :

$$a \text{ divise } c \text{ et } b \text{ divise } c \iff ab \text{ divise } c.$$

c. On considère le système (S) : $\begin{cases} x\equiv 6\ [17] \\ x\equiv 4\ [15] \end{cases}$ d'inconnue $x\in\mathbb{Z}$. Déterminer une solution particulière x_0 de (S).

d. Déduire des questions précédentes *toutes* les solutions de (S).

BANQUE PROBABILITÉS

Exercice 95.

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

a. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points, pour chaque noire tirée il perd 3 points. On note X le nombre de boules blanches tirées, Y le nombre de points marqués au cours de la partie. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X et de Y.

b. Dans cette question, les tirages sont supposés être effectués sans remise. Donner les lois de X et de Y.

Exercice 96.

On admet dans cet exercice que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soient $p \in \left]0,1\right[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$. On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte, le premier rayon étant envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que quand elle a été touchée r fois par le rayon. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

a. Déterminer la loi de X.

b. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 97.

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par $P(X = j, Y = k) = \dfrac{(j+k)(\frac{1}{2})^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!k!}$.

a. Déterminer les lois marginales de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

b. Prouver que $\mathrm{E}(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice 98.

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant appelé est $p \in \left]0,1\right[$. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants obtenus.

a. Donner la loi de X (justifier).

b. La secrétaire appelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus lors du premier appel. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants joints lors de ce second appel.

i. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k \mid X = i)$.

ii. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre (*indication* : on pourra utiliser, sans la prouver, l'identité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$).

iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 99.

a. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que pour tout $a > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{V}(Y_1)}{na^2}$.

c. Exemple

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? (*indication* : considérer la suite (Y_n) de variables de Bernoulli où Y_n mesure l'issue du *n*-ième tirage).

Exercice 100.

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Une variable aléatoire discrète *X*, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, obéit à la loi $P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

b. Calculer λ .

c. Prouver que *X* admet une espérance et la calculer.

d. *X* admet-elle une variance ?

Exercice 101.

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau *A*, *B* et *C*. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point *A*. Quand il a épuisé l'eau du puits où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du puits qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $M = A, B$ ou C , on note M_n l'évènement "l'animal est en *M* après son *n*-ième trajet", et l'on pose $m_n = P(M_n)$.

a. Exprimer, en justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

b. Soit la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Justifier sans calcul que *A* est diagonalisable. Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de *A* et déterminer le sous-espace propre associé. Déterminer une matrice inversible *P* et une matrice diagonale *D* telles que $D = P^{-1}AP$ (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).

c. Comment les résultats de la question **b.** peuvent-ils être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n ? (le calcul effectif n'est pas demandé).

Exercice 102.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère *N* variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre *p*.

a. Soient $i \in [\![1, N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$ et $P(X_i > n)$.

b. On considère la variable aléatoire $Y = \min_{1 \leq i \leq N} X_i$.

c. Calculer $P(Y > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $P(Y \leq n)$ puis $P(Y = n)$.

d. Reconnaître la loi de *Y*. En déduire l'espérance de *Y*.

Exercice 103.

Les questions **a.** et **b.** sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

a. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose X_1 et X_2 indépendantes, et qu'elles suivent toutes deux une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

b. Soient *X* et *Y* deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *Y* suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout entier *m*, la loi conditionnelle de *X* sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de *X*.

Exercice 104.

On dispose de *n* boules numérotées de 1 à *n*, et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les *n* boules, qui toutes viennent se loger aléatoirement dans un compartiment. On note *X* la variable aléatoire qui, à chaque expérience, décompte le nombre de compartiments restés vides.

a. Préciser les valeurs prises par *X*.

b. Déterminer $P(X = 2)$, puis finir de déterminer la loi de *X*.

c. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

d. Déterminer la limite de $\mathrm{E}(X)$ quand *n* tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 105.

On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 vaut $1/2$.

a. Énoncer la formule de Bayes pour un système complet d'évènements.

b. On choisit un dé au hasard parmi les 100, on lance ce dé et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un dé parmi les 100, et on lance *n* fois ce dé. On obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?

d. Déterminer la limite de p_n quand *n* tend vers l'infini, et interpréter ce résultat.

Exercice 106.

X et *Y* sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k ,$$

où $p \in \,]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère alors les variables aléatoires $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

a. Déterminer la loi du couple (U, V).

b. Déterminer les lois marginales de *U* et de *V*.

c. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de *V*.

c. *U* et *V* sont-elles indépendantes ?

Exercice 107.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs de la façon suivante : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on remet la boule dans l'urne dont elle provient. Si la boule tirée était blanche, le prochain tirage est effectué dans l'urne U_1. Dans le cas contraire, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement "la boule tirée au *n*-ième tirage est blanche".

Calculer p_1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$, et en déduire la valeur de p_n.

Exercice 108.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}$.

a. Déterminer les lois de X et de Y.
b. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X**.**
c. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
d. X et Y sont-elles indépendantes ?
e. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 109.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n, et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule blanche, et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 110.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

a. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum P(X = n) t^n$, de somme G_X, et l'on note R_X son rayon de convergence. Prouver que $R_X \geq 1$, que $G_X(1)$ et $G_X(-1)$ existent, et exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance. Exprimer enfin $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

b. Donner le domaine de définition de G_X et calculer $G_X(t)$ quand X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

c. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer, grâce aux questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 111.

On admet que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $p \in]0, 1[$, X et Y deux variables aléatoires sur X à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose la loi du couple (X, Y) donnée par $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n$ si $k \leq n$, 0 sinon.

a. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
b. Déterminer la loi de Y, vérifier que $1 + Y$ suit une loi géométrique et donner l'espérance de Y.
c. Déterminer la loi de X.

Exercice 112.

Soit E un ensemble possédant n éléments. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

a. Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$.

b. Déterminer le nombre b de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \varnothing$.

c. Déterminer le nombres c de triplets (A, B, C) de parties de E deux à deux disjointes telles que $E = A \cup B \cup C$.