POLYNÔMES

1. **a.** Factoriser $P = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ sachant que ce polynôme possède deux racines dont le produit vaut 5.

b. Factoriser $P = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + 2X - 1$ sachant que deux de ses racines sont de somme égale à 1.

c. Déterminer s'ils existent les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $(X+1)^2 \mid P-1$ et $(X-1)^2 \mid P+1$.

d. Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$ possède une racine triple, et factoriser alors P.

e. Soient a, b et c les trois racines complexes du polynôme $X^3 - 3X^2 + X - 1$. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$.

---

2. Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $(1+X^4)^n - X^n$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $1 + X + X^2$?

---

3. Soit P un polynôme complexe unitaire, que l'on écrit sous forme factorisée : $P = \prod_{i=1}^{p} (X - r_i)^{\alpha_i}$.

a. Déterminer le pgcd de P et de P'.

b. Comment, en pratique, prouver que toutes les racines de P sont simples ?

c. On pose $Q = \prod_{i=1}^{p} (X - r_i)$. Comment calculer Q sans factoriser P ?

---

4. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ où a et b sont deux réels et n un entier non nul.

a. Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.

b. Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

---

5. Quelles sont les fonctions polynômes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont bijectives ?

---

6. Soit P un polynôme à coefficients *entiers*. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $P(n)$ divise $P\big(n + kP(n)\big)$. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non constant P de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.

---

7. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P (prouver que si P' divise P, alors P'' divise P').

---

8. **a.** Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$

b. Donner une relation de récurrence liant P_n' et P_{n-1}.

c. Montrer que la famille $(P_k)_k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, et décomposer $P_n(X+1)$ sur cette base.

d. Prouver que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

9*. Trouver tous les polynômes complexes P tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ (on commencera par prouver que leurs racines ne peuvent qu'être nulles ou de module 1).

10*. Déterminer les complexes q tels que les deux racines de l'équation $z^2 - 2iz + q = 0$ soient orthogonales dans $\mathbb{C}$.

11. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. Prouver que le pgcd de ces deux polynômes reste le même, que ceux-ci soient vus comme éléments de $\mathbb{Q}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$.

Application : prouver qu'un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ ne saurait avoir de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

12. On considère d l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par $P \mapsto P - P'$.

a. Déterminer les polynômes P tels que $d(P) = 0$.
d est-elle injective ?

b. Q étant un polynôme donné, résoudre l'équation $d(P) = Q$ (on pourra dériver).
d est-elle surjective ?

c. Mêmes question avec l'application $\delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

13. **a.** Soient a, b, c et d quatre éléments d'un anneau commutatif A. Prouver l'identité :

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

b. D'où provient cette identité, quel message délivre-t-elle ?

c. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$.
Prouver que les racines réelles de P ont un ordre de multiplicité pair.
Prouver qu'il existe deux polynômes $R, S \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = R^2 + S^2$.

14*. On considère le polynôme réel $P_0 = X^4 - 4X + 2$, que l'on factorise dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$P_0 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d).$$

a. Prouver que P_0 possède exactement deux racines réelles, et que celles-ci sont irrationnelles.

b. Ecrire le système d'équations vérifié par les réels a, b, c et d.

c. Donner, en fonction de a, une équation du second degré dont d et $-b$ sont les racines.

d. On pose $t = d + b = d - (-b)$. Prouver que t vérifie l'équation $t^3 - 8t - 16 = 0$.

e. Prouver que t est irrationnel et en déduire que P_0 est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

15. Soit P un polynôme à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles et deux à deux distinctes. Prouver que le polynôme $Q = PP'' - P'^2$ est négatif (indication : c'est le numérateur de quoi, ce truc là ?)

En déduire que les coefficients de P vérifient les inégalités : $a_{k-1}a_{k+1} \leq {a_k}^2$.