ESPACES PROBABILISÉS

1. **a.** Soit ρ un réel élément de $]0,1[$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel λ pour que l'on définisse une probabilité sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant, pour tout entier p, $P(\{p\})=\lambda\rho^p$.

b. Ce choix de λ étant fait, on se place désormais dans l'espace probabilisé $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),P)$. On choisit un entier au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit impair ?

2. Soient deux événements A et B tels que $P(a)=0,6$ et $P(B)=0,4$. Calculer $P(A\cup B)$ dans les cas suivants :
A et B sont incompatibles ; A et B sont indépendants ; la réalisation de B entraîne celle de A.

3. Soit (A_n) une suite d'évènements d'un espace probabilisé (Ω,T,P).

a. Prouver que pour tout entier N, $P(\bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n)\leq\sum\limits_{n=0}^{N}P(A_n)$, puis que $P(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n)\leq\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(A_n)$.

b. Donner une interprétation de l'événement $I=\bigcap\limits_{n\geq 0} B_n$ où $B_n=\bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.

c. Prouver que $P(A)=\lim\limits_{n} P(B_n)$.

d. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Prouver que $P(A)=0$.

4. Une maladie touche un individu sur 100 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des malades et pour 0,5% des individus sains. Quelle est la probabilité qu'un individu soit malade s'il est testé positif ?

5. Une urne contient $n-1$ boules blanches et une boule noire. On tire les n boules successivement et sans remise. Calculer la probabilité p_k que la boule noire soit tirée au k-ième tirage.

6. On considère $n+1$ urnes $U_0,U_1,\dots,U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on tire successivement deux boules dans cette urne.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches si le tirage s'effectue avec remise ?

b. Même question pour un tirage effectué sans remise.

7. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On retire en une fois de cette urne une poignée aléatoire de p boules ($1\leq p\leq N$).

a. Soit $k\in[[p,N]]$. Calculer la probabilité de l'événement B_k : « le plus grand numéro de la poignée est k ».

b. En déduire la formule $\sum\limits_{k=p}^{N}\binom{k-1}{p-1}=\binom{N}{p}$.

8. Une cellule se déplace entre trois points distincts A, B et C. À chaque étape, elle quitte sa position et gagne avec la même probabilité l'un des deux autres points. On suppose qu'initialement la cellule est en A, et l'on note a_n, b_n, c_n les probabilités qu'elle soit en A, B ou C à l'issue de la n-ième étape.

Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n , et en déduire les expressions de a_n, b_n, c_n .

9. Une urne contient n boules ($n \geq 1$) numérotées de 1 à n.

a. On tire successivement deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à celui de la première boule, lorsque le tirage est avec remise puis lorsqu'il est sans remise (*indication : on pourra introduire l'événement* A_k *: « la deuxième boule porte le numéro k » et utiliser la famille d'événements* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$.

b. On tire successivement p boules dans l'urne.

Quelle est la probabilité pour que la p-ième boule tirée porte un numéro supérieur ou égal au numéro des $p-1$ premières boules tirées lorsque le tirage est sans remise ? *indication : on pourra introduire l'événement* A_k *: « la p-ième boule tirée porte le numéro k » et utiliser la famille d'événements* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$.

Montrer par récurrence sur n que pour tout couple d'entiers (n,p) avec $1 \leq p \leq n$, on a $\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$. En déduire une expression simple de la probabilité cherchée.

10. n joueurs (avec $n \geq 2$) vont successivement tenter une expérience dont la probabilité d'insuccès est $p \in]0,1[$. Si le premier joueur perd, la partie s'arrête. S'il triomphe, le deuxième joueur tente sa chance. S'il perd, la partie s'arrête, sinon le troisième joueur tente sa chance… Si le n-ième joueur tente sa chance et perd, la partie s'arrête, sinon la main revient au premier joueur et l'on continue ainsi. La partie s'arrête dès qu'un joueur perd.

a. Soit $k \in [[1,n]]$. Quelle est la probabilité que le k-ième joueur perde lors de sa i-ième tentative ?

b. Quelle est la probabilité pour que le k-ième joueur perde la partie ?

11. On note $\Omega = \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

a. Montrer (par exemple en comparant avec une intégrale), que $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

b. Soit $s > 1$. Prouver que l'on définit une probabilité P_s sur $(\Omega, \mathcal{A})$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}.$$

c. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P_s(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.

On note $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, et $A_k = p_k\mathbb{N}^*$.

d. Montrer que $\{1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}$.

e. En déduire que $\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} P_s\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)$.

f. Montrer que les évènements A_k sont mutuellement indépendants pour P_s et en déduire une preuve probabiliste de l'identité d'Euler :

$$\forall\, s > 1,\ \ln(\zeta(s)) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(1 - \frac{1}{p_k^{\,s}}).$$

g. Prouver que la série de fonctions $\sum -\ln(1 - \frac{1}{p_k^{\,s}})$ ne peut pas converger normalement sur $]1,+\infty[$.

h. En déduire la divergence des séries $\sum -\ln(1 - \frac{1}{p_k})$ puis $\sum \frac{1}{p_k}$.

ESPACES PROBABILISÉS (suite)

13. Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé (non pipé). A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, il gagne et la partie s'arrête. Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3, 4 ou 5, il gagne et la partie s'arrête. Sinon, A reprend la main et on recommence dans les mêmes conditions.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les probabilités des événements A_{2n-1} : « A gagne au $(2n-1)$-ième lancer » et B_{2n} : « B gagne au $2n$-ième lancer ».

b. Quelles sont les probabilités des événements « A gagne », « B gagne », « la partie ne s'arrête jamais » ?

---

15. Une cellule se déplace entre trois points distincts A, B et C. À chaque étape, elle quitte sa position et gagne avec la même probabilité l'un des deux autres points. On suppose qu'initialement la cellule est en A, et l'on note a_n, b_n, c_n les probabilités qu'elle soit en A, B ou C à l'issue de la n-ième étape.

Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n, et en déduire les expressions de a_n, b_n, c_n.

---

16. Une urne U contient une boule blanche et une boule noire, et une urne V contient deux boules blanches et une boule noire. On tire successivement une boule avec remise dans l'une des deux urnes en respectant le protocole suivant : on commence par tirer dans U, et si l'on tire une boule blanche on effectue le tirage suivant dans la même urne ; sinon, on change d'urne.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'urne U au n-ième tirage.

b. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.

---

17. Un joueur lance une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1-p$. Le joueur veut réaliser l'événement « obtenir pile deux fois de suite », et on note p_n la probabilité de l'événement E_n : « le deuxième pile de la première série de deux piles consécutifs a été obtenu au n-ième lancer ». On note B_n l'événement : « on a obtenu au moins une fois deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers ».

a. Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4 ainsi que $P(B_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

b. Démontrer que $P(B_n) = \sum_{k=2}^{n} p_k$ et que $p_{n+3} = P(E_{n+3}) = (1 - P(B_n))qp^2$.

c. En déduire que $p_{n+2} - p_{n+3} = qp^2 p_n$ si $n \geq 1$, puis donner une expression de p_n.

---

15. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : si la boule blanche est tirée, le jeu s'arrête ; si la boule noire est tirée, on la remet dans l'urne et l'on rajoute dans l'urne autant de boules noires qu'elle contenait de boules au tirage précédent. Puis l'on effectue un nouveau tirage. Soit A_n l'événement : « le n-ième tirage amène pour la première fois la boule blanche ».

a. Montrer que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

b. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$, et en déduire $\lim_n P(A_n)$. Interpréter ce résultat.

c. A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1$?