RÉDUCTION (1)

1. Diagonaliser ou, à défaut, trigonaliser, les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\4&2&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&2&-3\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}0&0&2&3\\0&0&-2&-3\\2&-2&0&-1\\3&-3&-1&-3\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}2&-1&1&-7\\9&-4&-7&-1\\0&0&3&-8\\0&0&2&-5\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}(0)&&1\\&\iddots&\\1&&(0)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

2. **a.** Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B de l'exercice **1.**

Déterminer les endomorphismes qui commutent avec u.

Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par u (notant $\tilde{u}$ la restriction de u à un tel sous-espace, on prouvera au préalable que le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$ divise celui de u).

Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.

b. Soit $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&2&-3\\-2&2&1\end{pmatrix}$. Réduire A, et en déduire le commutant de A (*i.e.* l'ensemble des matrices qui commutent avec A), les puissances de A, ainsi que d'éventuelles racines carrées de A.

3. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&1\\a&1&0\end{pmatrix}$ où a est un réel.

Déterminer le rang de A. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Soit $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&-1\end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b. Quelles sont les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$? En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\operatorname{vect}(I_2,A)$.

c. Soit $R\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $R^2=A$. Prouver que R commute avec A et conclure.

5. **a.** Prouver que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

b. Construire une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable.

6. Soient u et v deux endomorphismes d'un même espace vectoriel E. Prouver que $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres (il y a une exception !). Prouver que cette exception ne se présente pas en dimension finie, mais qu'elle subsiste en dimension quelconque.

7. **a.** Diagonaliser la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

b. Une matrice carrée réelle est dite « magique » si la somme de toutes ses lignes et de toutes ses colonnes est la même. Montrer qu''une matrice est magique si et seulement si elle commute avec J. En déduire que les matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituent une sous-algèbre et en donner la dimension.

8. **a.** Prouver qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En déduire que deux matrices non scalaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace et même déterminant.

b. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $a+ib$ et $a-ib$. Prouver que A est semblable à la matrice B suivante (on choisira e_1 quelconque non nul et l'on définira e_2 comme il le faut) :

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

9. **a.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Prouver que $\det A > 0$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Prouver que le rang de A est pair.

c. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$.

10. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

b. Soient a, b, c trois complexes et $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déterminer les éléments propres de B.

11. Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne supposée non nulle, et $M = C\,{}^tC$.

a. Déterminer le rang de M, et en déduire le polynôme caractéristique de M.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

12. Soient A et B deux matrices complexes telles qu'il existe une matrice non nulle P vérifiant $AP = PB$. Calculer, pour tout polynôme Q, le produit $Q(A)P$. En déduire que $P_A(B)$ n'est pas inversible, puis que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing$.

13. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et un vecteur v tels que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$.

a. Donner le rang de f.

b. f est-il diagonalisable ? (discuter suivant le vecteur v).

14. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi. Prouver que la réciproque est fausse en général, mais vraie si A est inversible (on raisonnera en termes de polynômes annulateurs).

15. Soit u un endomorphisme d'un -espace vectoriel E de dimension n. On note $\mathrm{Com}(u)$ l'algèbre (?) des endomorphismes de E qui commutent avec u.

a. Soit v dans $\mathrm{Com}(u)$. Prouver que les espaces propres de u sont stables par v.

b. *On suppose dans la suite que u est diagonalisable.* Prouver réciproquement que si w stabilise les espaces propres de u, alors w est dans $\mathrm{Com}(u)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Com}(u)$.

16. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ supposé diagonalisable. Prouver que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$. Réciproque ?