RÉDUCTION (2)

1. (Important) Soit u un endomorphisme diagonalisable, et F un sous-espace stable par u. Prouver que la restriction de u à F est encore diagonalisable.

2. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables (on choisira le deuxième vecteur de la nouvelle base *avant* le premier) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace de dimension finie E. On suppose que u et v commutent.

a. Prouver que les espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

b. Prouver que u et v possèdent une base commune de diagonalisation (utiliser l'exercice **1.**).

4. Racines carrées de matrices

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice commute avec une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts (deux démonstration : une « à la main », l'autre utilisant le résultat de la question **3.a.**).

b. Soit A une matrice carrée, et B une racine carrée de A. Prouver que A et B commutent.

c. Donner *toutes* les racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une matrice que l'on a diagonalisé sous la forme :

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ puis } P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ et enfin } P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

5*. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$, $A^n = I_2$.

a. Quelles sont les valeurs possibles de P_A ?

b. Prouver que $A^{12} = I_2$.

c. Généralisation ?

6. **a.** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Prouver, pour tout entier $k \in [[1, n]]$, l'existence d'un sous-espace F de E, de dimension k, stable par u.

b. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Prouver l'existence d'un polynôme P de degré 1 ou 2 tel que $P(u)$ ne soit pas inversible. En déduire que u possède une droite ou un plan stable.

7. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrivant par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A et C carrées.

a. Prouver que si M est diagonalisable, alors A et C le sont.

b. Étudier la réciproque.

c*. Prouver que si A et C sont diagonalisables sans valeur propre commune, alors M est diagonalisable.

d*. On suppose ici que $A = B = C$. Calculer $P(M)$ pour tout polynôme P (on exprimera le résultat en utilisant le polynôme dérivé P'). En déduire que M n'est diagonalisable que si $A = 0$.

8. Prouver que la transposition définit un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Éléments propres ?

9. On fixe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $f(M) = tr(A)M - tr(M)A$. Donner une condition nécessaire et suffisante (sur A !) pour que f soit diagonalisable (on cherchera les vecteurs propres de f).

10. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_n - A$.

Calculer par récurrence $D_n(\theta) = \det(A + 2\cos\theta I_n)$ et en déduire les spectres de A puis de B.

11*. Soient A et B deux matrices carrées réelles, que l'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Prouver l'existence de deux matrices réelles R et S telles que :

i. la matrice $R + \mathrm{i}S$ est inversible ;

ii. on a les relations $AR = RB$ et $AS = SB$.

b. Que peut-on dire de l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \det(R + tS)$?

c. Prouver que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espaces vectoriel de dimension finie qui commutent.

a. Prouver que u et v possèdent un vecteur propre commun (on utilisera le résultat de la question **3.a.**).

b. Prouver par récurrence sur la dimension de l'espace que u et v possèdent une base commune de trigonalisation.

13. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On note P_n le polynôme donnant le développement limité au voisinage de 0 de $\sqrt[p]{1+x}$ à l'ordre n : $\sqrt[p]{1+x} = P_n(x) + \circ(x^n)$

a. Prouver l'existence d' un polynôme Q_n tel que $1 + X = P_n(X)^p + X^n Q_n(X)$.

b. Calculer $\left(P_n(I_n + N)\right)^p$ quand N est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c*. Prouver que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une puissance p-ième.