Partie 1

On pose, quand c'est possible pour x réel :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + x^2} \quad .$$

1. **a.** Prouver que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est continue.

b. Déterminer $f(0)$ (on admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de f' en $+\infty$.

Partie 2

Pour k entier plus grand que 1 et λ *non entier*, on pose $w_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(kt)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$.

3. On pose, pour n entier strictement positif et t dans $[0,\pi]$, $C_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Prouver que :

$$\forall t \in \left]0,\pi\right],\ C_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} .$$

4. **a.** Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_0^{\pi} \left(\cos(\lambda t) - 1\right) C_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Rappeler l'énoncé du lemme de Riemann-Lebesgue.

c. En considérant la fonction la fonction Φ définie sur $]0,\pi]$ par $\Phi(t) = \dfrac{\cos(\lambda t) - 1}{\sin\frac{t}{2}}$, prouver que la série $\sum w_k$ est convergente, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} w_k = \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda}\right].$$

5. Calculer w_k (simplifier l'expression au maximum).

6. En déduire la formule :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2-\lambda^2}\,.$$

7. On suppose dans cette question que $\left|\lambda\right| < 1$.

a. En utilisant une série géométrique, prouver que :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{k^{2n}}\,.$$

b. En déduire que :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\psi(2n+2)\lambda^{2n+1}\,,$$

où ψ désigne la fonction dzéta-alternée définie par $\psi(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

c. Prouver que pour tout $s > 1$, on a $\psi(s) = \left(1 - \dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$.

8. **a.** Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} - \dfrac{1}{\lambda}}{\lambda}\,.$$

b. Retrouver la valeur de $f(0) = \psi(2)$ obtenue à la question **1.b.**.

9. Conjecturer la valeur de $f(x)$ pour certaines valeurs de x, et justifier que cette conjecture est vraie.