

## Partie 1

On pose, quand c'est possible pour  $x$  réel :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + x^2}.$$

On posera  $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + x^2}$ .

1. a. Prouver que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle y est continue.

Puisque  $n \geq 1$ , chaque fonction  $u_n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$  qui est le terme général d'une série convergente indépendante de  $x$ . On en déduit la convergence normale (donc uniforme, donc simple) de la série de fonctions  $\sum u_n$ , et donc le fait que  $f$  soit définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

- b. Déterminer  $f(0)$  (on admettra que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ d'où il résulte que } f(0) = \frac{\pi^2}{12}.$$

- c. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Chaque fonction  $u_n$  possède une limite en  $+\infty$ , la convergence de la série de fonctions  $\sum u_n$  est uniforme sur  $\mathbb{R}$  et enfin, hypothèse à ne pas oublier,  $+\infty$  est adhérent à  $\mathbb{R}$ . Le théorème de sommation des limites s'applique et nous permet d'affirmer que  $f$  possède une limite en  $+\infty$  égale à la somme des limites, ici 0.

2. a. Prouver que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Chaque fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et la convergence de la série de fonctions  $\sum u_n$  est simple sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, si  $[-a, a]$  est un segment inclus dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\forall x \in [-a, a], \left| u_n'(x) \right| = \left| \frac{(-1)^{n-1} 2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2a}{n^4},$$

ce qui assure la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions  $\sum u_n'$  sur tout segment de  $\mathbb{R}$ . Le théorème de dérivation terme à terme s'applique et nous dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et peut être dérivée terme à terme.

- b. Déterminer la limite de  $f'$  en  $+\infty$ .

Le seul intérêt de cette question est de vous rappeler que la majoration précédente, valable sur les segments, ne permet pas de passer à la limite en  $+\infty$  puisque  $+\infty$  n'est pas adhérent aux segments. En revanche, on dispose d'un peu de marge pour majorer  $u_n'$  puisque le terme  $n^2 + x^2$  permet largement de compenser le  $x$  du numérateur : pour  $|x| \geq 1$ ,  $|x| \leq x^2 \leq x^2 + n^2$  et pour  $|x| \leq 1$ ,  $|x| \leq n^2 \leq n^2 + x^2$ . Bref, dans tous les cas :

$$\left| u_n'(x) \right| = \left| \frac{(-1)^{n-1} 2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2}{n^2 + x^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

La convergence normale sur  $\mathbb{R}$  de la série de fonctions  $\sum u_n'$  en découle immédiatement, et la suite n'est que routine.

## Partie 2

Pour  $k$  entier plus grand que 1 et  $\lambda$  non entier, on pose  $w_k = \int_0^\pi \cos(kt) \cos(\lambda t) dt$ .

3. On pose, pour  $n$  entier strictement positif et  $t$  dans  $[0, \pi]$ ,  $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$ . Prouver que :

$$\forall t \in ]0, \pi], C_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Encore ?! Quand je vous ai dit qu'il fallait savoir faire ce calcul rapidement, je ne vous ai pas menti ! Pour mémoire : on calcule  $\sin \frac{t}{2} C_n(t)$  qui apparaît comme une somme télescopique (à condition de connaître sa trigo, por supuesto !).

4. a. Prouver que  $\sum_{k=1}^n w_k = \int_0^\pi (\cos(\lambda t) - 1) C_n(t) dt$ .

Puisque  $\sum_{k=1}^n w_k = \int_0^\pi \cos(\lambda t) C_n(t) dt$ , il y a juste à prendre l'initiative de prouver que  $\int_0^\pi C_n(t) dt = 0$  ce

qui est parfaitement immédiat à partir de la formule développée de  $C_n(t)$ .

- b. Rappeler l'énoncé du lemme de Riemann-Lebesgue.

Si  $f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(xt) dt = 0.$$

- c. En considérant la fonction la fonction  $\Phi$  définie sur  $]0, \pi]$  par  $\Phi(t) = \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\sin \frac{t}{2}}$ , prouver que la série

$\sum w_k$  est convergente, et que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} w_k &= \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda} \right). \\ \sum_{k=1}^n w_k &= \int_0^\pi (\cos(\lambda t) - 1) C_n(t) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(\lambda t) - 1) dt. \\ &= \int_0^\pi \Phi(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt + \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Mais  $\Phi(t) \underset{0}{\sim} \frac{-\lambda^2 t^2}{2 \frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ , il est donc possible de prolonger  $\Phi$  en une fonction continue sur  $[0, \pi]$ . Cela

autorise l'utilisation du lemme de Riemann-Lebesgue qui nous dit alors que  $\int_0^\pi \Phi(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . La formule demandée en résulte immédiatement.

5. Calculer  $w_k$  (simplifier l'expression au maximum).

$$\begin{aligned} w_k &= \int_0^\pi \cos(kt) \cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(k + \lambda)t + \cos(k - \lambda)t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k + \lambda} \sin(k + \lambda)\pi + \frac{1}{k - \lambda} \sin(k - \lambda)\pi \right] \\ &= \frac{1}{2} (-1)^{k-1} \sin(\lambda\pi) \left[ \frac{1}{k + \lambda} - \frac{1}{k - \lambda} \right] \\ &= (-1)^{k-1} \sin(\lambda\pi) \frac{-2\lambda}{k^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

6. En déduire la formule :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - \lambda^2}.$$

Ce n'est autre que le bilan des questions 4. et 5..

7. On suppose dans cette question que  $|\lambda| < 1$ .

a. En utilisant une série géométrique, prouver que :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{k^{2n}}.$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - \frac{\lambda^2}{k^2}}.$$

Puisque  $|\lambda| < 1$ , il vient  $\frac{\lambda^2}{k^2} < 1$  pour tout entier  $k \geq 1$  ce qui permet de représenter  $\frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{k^2}}$  comme somme de la série géométrique de raison  $\frac{\lambda^2}{k^2}$ . Cela donne

la formule demandée.

b. En déduire que :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(2n + 2) \lambda^{2n+1},$$

où  $\psi$  désigne la fonction dzéta-alternée définie par  $\psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ .

Ce développement en série de  $\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$  n'est autre que le résultat direct de l'interversion des sommations

dans la formule de la question 7.a. (je vous laisse vous en convaincre). Reste à justifier cette interversion.

Partons de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda^2}$  qui est une série convergente à termes positifs, et effectuons le même dévelop-

pement en série géométrique :  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{k^2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{k^{2n}}$ . La simple légitimité de ce calcul per-

met d'affirmer que la famille  $(\frac{1}{k^2} \frac{\lambda^{2n}}{k^{2n}})_{n,k \geq 1}$  est sommable. Le théorème de Fubini permet alors d'invertir les sommations dans la formule de la question 7.a..

c. Prouver que pour tout  $s > 1$ , on a  $\psi(s) = (1 - \frac{1}{2^{s-1}})\zeta(s)$ .

Il s'agit d'un calcul analogue à celui de la question 1.b. :

$$\zeta(s) - \psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^s} = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^{s-1}} \zeta(s).$$

8. a. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} - \frac{1}{\lambda}}{\lambda}.$$

$$\frac{\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} - \frac{1}{\lambda}}{\lambda} = \frac{\lambda\pi - \sin(\pi\lambda)}{\lambda^2 \sin(\pi\lambda)} \underset{0}{\sim} \frac{\lambda^3 \pi^3}{\lambda^3 \pi} \underset{\lambda \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$

b. Retrouver la valeur de  $f(0) = \psi(2)$  obtenue à la question 1.b..

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \psi(2n+2) \lambda^{2n+1} \Rightarrow \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} - \frac{1}{\lambda} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(2n+2) \lambda^{2n}.$$

On est donc amené à justifier un passage à la limite quand  $\lambda \rightarrow 0$  dans cette série. Cela fait, on retrouvera bien  $2\psi(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

Pour  $s > 1$ ,  $\psi(s)$  est la somme d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît. La somme de cette série est alors du signe de ce premier terme et majorée par lui, soit  $0 \leq \psi(s) \leq 1$ . Alors, pour

$|\lambda| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|\psi(2n+2)\lambda^{2n}| \leq \frac{1}{4^n}$  qui est le terme général d'une série convergente indépendante de  $\lambda$ . La série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} \psi(2n+2)\lambda^{2n}$  converge uniformément sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , ce qui permet de sommer les limites en 0.

9. Conjecturer la valeur de  $f(x)$  pour certaines valeurs de  $x$ , et justifier que cette conjecture est vraie.

Mais où a-t-on utilisé que  $\lambda$  était réel ? Nulle part ! On peut donc remplacer  $\lambda$  par  $ix$  avec  $x$  réel vérifiant  $|x| < 1$ . Et ça donne... ?