Partie I

0. Justifier rapidement que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} PQ\,.$$

1. On note L_n le polynôme suivant :

$$L_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^2-1)^n\,.$$

a. Calculer L_1, L_2, L_3, donner le degré, la parité et le coefficient dominant de L_n.

b. Prouver que -1 et 1 sont racines du polynôme $\dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}X^p}(X^2-1)^n$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

c. Prouver que L_n a toutes ses racines réelles, simples et dans $]-1,1[$.

d. Prouver, en intégrant par parties, que $(L_p|L_q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_p L_q = 0$ pour $p \neq q$.

e. Prouver que $(L_p|Q) = 0$ dès que $\deg Q < p$.

f. Calculer $(L_p|L_p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_p L_p$ (on pourra effectuer un changement de variable puis faire un petit détour par le cours sur les séries pour se remettre en tête un certain type d'intégrales).

2. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit k un entier vérifiant $0 \leq k \leq n-1$. Prouver que $(XL_{n+1}|L_k) = 0$.

b. Prouver l'existence de réels $a_n, b_n, c_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ tels que :

$$L_{n+2} = (a_n X + b_n)L_{n+1} + c_n L_n + \alpha_{n-1}L_{n-1} + \dots + \alpha_1 L_1 + \alpha_0 L_0\,.$$

c. Prouver que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

d. Intérêt ?

Partie II

3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Rappeler la dimension de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$. Que vaut en particulier la dimension du dual de E : $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$?

4. Soient $r_1, \dots, r_n$ des réels deux à deux distincts. On définit sur $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ les formes linéaires suivantes :

$$\varphi_k : P \mapsto P(r_k)\,.$$

a. Prouver que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre (*indication :* quel est le titre le plus célèbre du groupe texan ZZ Top ?).

b. Que peut-on en déduire au vu de la question **3.** ?

c. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $I(P) = \int_{-1}^{1} P$.

Prouver l'existence de réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ I(P) = a_1 P(r_1) + \dots + a_n P(r_n).$$

5. On choisit désormais pour les r_k les racines du polynôme L_n.

En effectuant la division euclidienne de P par L_n, prouver que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ I(P) = a_1 P(r_1) + \dots + a_n P(r_n).$$

On vient ainsi de prouver que la formule $a_1 P(r_1) + \dots + a_n P(r_n)$ donne une valeur ***exacte*** *de l'intégrale entre -1 et 1 d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$. L'idée est maintenant de prendre, pour une fonction numérique continue sur $[-1,1]$, cette même quantité $a_1 f(r_1) + \dots + a_n f(r_n)$ comme valeur* ***approchée*** *de l'intégrale de f. L'objet de la partie III est de majorer l'erreur commise dans cette approximation.*

Partie III

On fixe dans cette partie une fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$ et l'on pose $M_{2n} = n_\infty(f^{(2n)})$.

6. a. Prouver que l'application Φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n} \\ \quad P \mapsto \left(P(r_1), P'(r_1), \dots, P(r_n), P'(r_n)\right) \end{cases}.$$

b. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme L de degré inférieur ou égal à $2n-1$ tel que :

$$L(r_1) = f(r_1),\ L'(r_1) = f'(r_1), \dots, L(r_n) = f(r_n),\ L'(r_n) = f'(r_n).$$

7. Soit x un réel élément de $[-1,1]$ différent des r_i.

On pose, pout $t \in [-1,1]$, $\delta(t) = L(t) - f(t) + \dfrac{f(x) - L(x)}{L_n^2(x)} L_n^2(t)$.

a. Calculer $\delta(x)$ et, pour $1 \le k \le n$, $\delta(r_k)$ et $\delta'(r_k)$

b. Prouver que la fonction δ' s'annule au moins $2n$ fois.

c. En déduire l'existence d'un élément c de $[-1,1]$ tel que $\delta^{(2n)}(c) = 0$.

d. Prouver que :

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(2n)}(c)}{(L_n^2)^{(2n)}} L_n^2(x).$$

8. Prouver que $\left|\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \left(a_1 f(r_1) + \dots + a_n f(r_n)\right)\right| = \left|\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} L(t)\mathrm{d}t\right|$ et en déduire une majoration de $\left|\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \left(a_1 f(r_1) + \dots + a_n f(r_n)\right)\right|$.