

Partie I

0. Justifier rapidement que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$(P|Q) = \int_{-1}^1 PQ.$$

La bilinéarité, la symétrie et la positivité sont évidentes. Reste la définie positivité : si $(P|P) = \int_0^1 P^2 = 0$,

alors étant positive et continue, la fonction intégrée est nulle. Mais si un polynôme est nul sur $[-1,1]$, il est nul sur \mathbb{R} puisqu'il possède une infinité de racines.

1. On note L_n le polynôme suivant :

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n}(X^2 - 1)^n.$$

a. Calculer L_1, L_2, L_3 , donner le degré, la parité et le coefficient dominant de L_n .

On trouve aisément $L_1 = 2X$, $L_2 = 12X^2 - 4$ et $L_3 = 120X^3 - 72X$.

b. Prouver que -1 et 1 sont racines du polynôme $\frac{d^p}{dX^p}(X^2 - 1)^n$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

-1 et 1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2 - 1)^n$, ils annulent donc toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclus.

c. Prouver que L_n a toutes ses racines réelles, simples et dans $] -1, 1[$.

Posons $P_n = (X^2 - 1)^n$: $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, donc le théorème de Rolle nous donne une annulation de P_n' (ici, cette annulation est 0 !). Combinée aux annulations de P_n' que sont -1 et 1 , on obtient trois annulations de P_n' sur $[-1,1]$. Re-Rolle et on obtient deux annulations de P_n'' sur $[-1,1]$ auxquelles s'ajoutent -1 et 1 ... Il est facile de réitérer ce processus jusqu'à obtenir le résultat demandé (je m'offre le luxe de ne pas rédiger la récurrence).

d. Prouver, en intégrant par parties, que $(L_p|L_q) = \int_{-1}^1 L_p L_q = 0$ pour $p \neq q$.

$$\begin{aligned} (L_p|L_q) &= \int_{-1}^1 \frac{d^p}{dX^p}((X^2 - 1)^p) \frac{d^q}{dX^q}((X^2 - 1)^q) dX \\ &= \left[\frac{d^p}{dX^p}((X^2 - 1)^p) \frac{d^{q-1}}{dX^{q-1}}((X^2 - 1)^q) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{p+1}}{dX^{p+1}}((X^2 - 1)^p) \frac{d^{q-1}}{dX^{q-1}}((X^2 - 1)^q) dX \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{d^{p+1}}{dX^{p+1}}((X^2 - 1)^p) \frac{d^{q-1}}{dX^{q-1}}((X^2 - 1)^q) dX \end{aligned}$$

Lors des intégrations par parties successives, les crochets seront nuls à chaque étape, jusqu'à obtenir :

$$(L_p|L_q) = (-1)^q \int_{-1}^1 \frac{d^{p+q}}{dX^{p+q}}((X^2 - 1)^p)(X^2 - 1)^q dX.$$

Si par exemple $p < q$, le polynôme $(X^2 - 1)^p$ qui est de degré $2p$ ayant été dérivé $p + q$ fois, il vient $\frac{d^{p+q}}{dX^{p+q}}((X^2 - 1)^p) = 0$ et donc $(L_p | L_q) = 0$.

e. Prouver que $(L_p | Q) = 0$ dès que $\deg Q < p$.

D'après le critère des degrés étagés, la famille $(L_0, L_1, \dots, L_{p-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$: Q est donc combinaison linéaire de ces vecteurs qui sont tous orthogonaux à L_p , de sorte que Q lui-aussi est orthogonal à L_p .

f. Calculer $(L_q | L_q) = \int_{-1}^1 L_q L_q$ (on pourra effectuer un changement de variable puis faire un petit détour par

le cours sur les séries pour se remettre en tête un certain type d'intégrales).

On reprend la formule obtenue à la question 1.d. en choisissant $p = q$:

$$\begin{aligned} (L_q | L_q) &= (-1)^q \int_{-1}^1 \frac{d^{2q}}{dX^{2q}} ((X^2 - 1)^q) (X^2 - 1)^q dX \\ &= (2q)! \int_{-1}^1 (1 - X^2)^q dX \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $u = \arccos X$ pour obtenir :

$$(L_q | L_q) = (2q)! \int_0^\pi \sin^{2q+1} u du = 2(2q)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q+1} u du.$$

On reconnaît une intégrale de Wallis d'ordre impair, qui elle aussi se calcule par parties, ce qui donne finalement aux erreurs de calcul près :

$$(L_q | L_q) = \frac{2^{2q+1} (q!)^2}{2q+1}.$$

2. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit k un entier vérifiant $0 \leq k \leq n-1$. Prouver que $(XL_{n+1} | L_k) = 0$.

$$(XL_{n+1} | L_k) = \int_{-1}^1 XL_{n+1} L_k = (L_{n+1} | XL_k) = 0 \text{ puisque } \deg(XL_k) \leq n-1+1 = n \text{ (cf. question 1.e.)}$$

b. Prouver l'existence de réels $a_n, b_n, c_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ tels que :

$$L_{n+2} = (a_n X + b_n) L_{n+1} + c_n L_n + \alpha_{n-1} L_{n-1} + \dots + \alpha_1 L_1 + \alpha_0 L_0.$$

D'après la règle des degrés échelonnés, la famille $(XL_{n+1}, L_{n+1}, L_n, \dots, L_1, L_0)$ est une base de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ d'où le résultat demandé.

c. Prouver que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

On multiplie scalairement par L_k (avec $0 \leq k \leq n-1$) l'égalité précédente. Par orthogonalité de la famille des polynômes de Legendre et grâce au fait que $(XL_{n+1} | L_k) = 0$, il vient $\alpha_k (L_k | L_k) = 0$, soit $\alpha_k = 0$.

d. Intérêt ?

On dispose désormais d'une formule de récurrence linéaire à deux termes qui s'écrit :

$$L_{n+2} = (a_n X + b_n) L_{n+1} + c_n L_n.$$

Une fois déterminés a_n , b_n et c_n (ce que l'on sait faire mais que je n'ai pas développé ici), cette formule nous donne une façon de calculer les L_n beaucoup plus simple que la formule initiale.

Partie II

3. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Rappeler la dimension de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$. Que vaut en particulier la dimension du dual de E : $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$?

C'est du cours : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$. En particulier, $\dim E^ = \dim E$.*

4. Soient r_1, \dots, r_n des réels deux à deux distincts. On définit sur $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ les formes linéaires suivantes :

$$\varphi_k : P \mapsto P(r_k).$$

a. Prouver que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre (*indication* : quel est le titre le plus célèbre du groupe texan ZZ Top ?).

Comme chacun sait, l'un des morceaux les plus célèbres de ZZ Top est « La Grange ». Soient alors $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$. On a donc $\alpha_1 P(r_1) + \dots + \alpha_n P(r_n) = 0$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$. On applique cela au polynôme $(X - r_2)(X - r_3) \dots (X - r_n)$ et on trouve $\alpha_1 = 0$; même chose pour les autres α_k . J'espère que vous aurez reconnu les polynômes intervenant dans le problème de l'interpolation de Lagrange !

b. Que peut-on en déduire au vu de la question **3.** ?

Les φ_k forment une famille libre de cardinal n du dual de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, comme E , est de dimension n . On a donc trouvé une base de E^ .*

c. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $I(P) = \int_{-1}^1 P$.

Prouver l'existence de réels a_1, a_2, \dots, a_n tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], I(P) = a_1 P(r_1) + \dots + a_n P(r_n).$$

Si on la restreint à E , I est une forme linéaire et elle se décompose donc sur la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^ ; il existe donc a_1, a_2, \dots, a_n tels que $I|_E = a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n$, ce qui est exactement le résultat demandé.*

5. On choisit désormais pour les r_k les racines du polynôme L_n .

En effectuant la division euclidienne de P par L_n , prouver que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], I(P) = a_1 P(r_1) + \dots + a_n P(r_n).$$

On écrit $P = QL_n + R$ avec $\deg R < \deg L_n = n$. Puisque $\deg P \leq 2n-1$, il vient $\deg Q \leq n-1$. On sait

*alors d'après la question **1.e.** que $\int_{-1}^1 QL_n = 0$. Ainsi $I(P) = \int_{-1}^1 (QL_n + R) = \int_{-1}^1 R = I(R) = a_1 R(r_1) + \dots + a_n R(r_n)$.*

Mais puisque les r_k sont les racines de L_n , on a $P(r_k) = R(r_k)$ d'où le résultat.

Partie III

On fixe dans cette partie une fonction numérique f de classe \mathcal{C}^{2n} sur $[-1, 1]$ et l'on pose $M_{2n} = n_\infty(f^{(2n)})$.

6. **a.** Prouver que l'application Φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{2n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ P \mapsto (P(r_1), P'(r_1), \dots, P(r_n), P'(r_n)) \end{cases}.$$

Cette application est évidemment linéaire entre deux espaces de même dimension finie égale à $2n$. Il y a donc juste à prouver son injectivité. Or, si $\Phi(P) = 0$, P possède les r_i pour racines au moins doubles ce qui lui donne $2n$ racines alors que son degré est majoré par $2n - 1$. On en déduit que $P = 0$ et donc l'injectivité de Φ .

- b. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme L de degré inférieur ou égal à $2n - 1$ tel que :

$$L(r_1) = f(r_1), L'(r_1) = f'(r_1), \dots, L(r_n) = f(r_n), L'(r_n) = f'(r_n).$$

Il y a juste à dire que le $2n$ -uplet $(f(r_1), f'(r_1), \dots, f(r_n), f'(r_n))$ est atteint une fois et une seule par Φ .

7. Soit x un réel élément de $[-1, 1]$ différent des r_i .

$$\text{On pose, pour } t \in [-1, 1], \delta(t) = L(t) - f(t) + \frac{f(x) - L(x)}{L_n^2(x)} L_n^2(t).$$

- a. Calculer $\delta(x)$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $\delta(r_k)$ et $\delta'(r_k)$.

Tout ce petit monde est nul.

- b. Prouver que la fonction δ' s'annule au moins $2n$ fois.

La fonction δ possède $n + 1$ annulations : x et les r_k . D'après le théorème de Rolle, δ' s'annule au moins n fois et ce **strictement** entre les annulations de δ . À cela viennent s'ajouter les r_k qui, eux-aussi, annulent δ' et cela nous donne $2n$ annulations pour δ' (au moins).

- c. En déduire l'existence d'un élément c de $[-1, 1]$ tel que $\delta^{(2n)}(c) = 0$.

C'est le classique « Rolle itéré » ou « Rolle en entonnoir » (appellation non contrôlée).

- d. Prouver que :

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(2n)}(c)}{(L_n^2)^{(2n)}} L_n^2(x).$$

On écrit que $\delta^{(2n)}(c) = 0$: $0 = L^{(2n)}(c) - f^{(2n)}(c) + \frac{f(x) - L(x)}{L_n^2(x)} L_n^{(2n)}(c)$. Mais $L^{(2n)} = 0$ puisque

$\deg L \leq 2n - 1$ et $L_n^{(2n)}$ est une constante puisque $\deg L_n^2 = 2n$. On obtient ainsi la formule demandée (notons que si x est l'un des r_k , n'importe quelle valeur de c convient).

8. En déduire une majoration de $\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (a_1 f(r_1) + \dots + a_n f(r_n)) \right|$.

Puisque f et L prennent les mêmes valeurs aux r_k , il vient :

$$a_1 f(r_1) + \dots + a_n f(r_n) = a_1 L(r_1) + \dots + a_n L(r_n) = \int_{-1}^1 L(t) dt.$$

Alors :

$$\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (a_1 f(r_1) + \dots + a_n f(r_n)) \right| = \left| \int_{-1}^1 f(t) dt - \int_{-1}^1 L(t) dt \right| \leq \int_{-1}^1 |f(t) - L(t)| dt \leq \frac{M_{2n}}{L_n^{(2n)}} \int_{-1}^1 L_n^2.$$