

Toutes les matrices envisagées dans ce problème sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une « racine carrée de A » est une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$; on note alors $\text{Rac}(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / R^2 = A\}$ l'ensemble de ses racines carrées.

I. Généralités sur $\text{Rac}(A)$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a. Prouver que pour que $\text{Rac}(A)$ soit non vide, il faut que $\det(A)$ soit positif.
 - b. Prouver que si $R \in \text{Rac}(A)$, A et R commutent.
 - c. Soit B une matrice semblable à A , $B = P^{-1}AP$. Quel lien existe-t-il entre $\text{Rac}(A)$ et $\text{Rac}(B)$?

2. Pour tout réel α , on envisage la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$.
 - a. Calculer A_α^2 .
 - b. Étant donnée une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble $\text{Rac}(A)$ est-il toujours une partie finie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
 - c. Expliciter une autre catégorie de matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en nombre infini, telles que $M^2 = I_2$ (c'est du cours).

3. Soit u un endomorphisme non nul de \mathbb{R}^n , que l'on suppose nilpotent. On note p « l'indice de nilpotence de u », c'est-à-dire le plus petit des entiers k tels que $u^k = 0$.
 - a. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$, et prouver que la famille $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est libre.
 - b. En déduire que $p \leq n$ puis que $u^n = 0$.
 - c. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence p . Prouver que si $p > \frac{n+1}{2}$, alors $\text{Rac}(N) = \emptyset$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $n-1$, R une racine carrée de A .
 - a. Prouver que le noyau de R est inclus dans le noyau de A , et que R ne saurait être inversible.
 - b. En déduire que A et R ont même noyau.
 - c. Prouver que A et R ont même image.

II. Cas des matrices 2-2 non inversibles.

6. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton. À quelle formule se réduit-il pour $n = 2$?
7. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ supposée non inversible, et R une racine carrée éventuelle de A .
 - a. Calculer $\det(R)$.

- b. En déduire une condition nécessaire portant sur $\text{tr}(A)$ pour que R existe.
- c. On suppose en outre que $\text{tr}(A) \neq 0$. Prouver que R est proportionnelle à A .

8. On envisage $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer $\text{Rac}(A)$.

III. Cas où $A = I_n$.

9. Prouver que $\text{Rac}(I_n)$ est exactement constitué des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables et à spectre inclus dans $\{-1, 1\}$.

IV. Un exemple explicite.

On considère ici la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. a. Calculer le polynôme caractéristique P_A de A .
- b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
- c. Expliciter un vecteur propre $X_1 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de A associé à sa valeur propre réelle.
- d. Calculer $A^2 + I_3$, et donner un exemple simple de vecteur non nul $X_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A^2 + I_3)X_2 = 0$.
- e. Prouver que la famille (X_1, X_2, AX_2) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

11. a. Prouver que A est semblable à la matrice R suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Prouver que R puis A possèdent des racines carrées réelles et en expliciter au moins une pour chacune.

V. Le cas diagonalisable.

12. a. Expliciter une infinité de racines carrées de la matrice nulle.
- b. Soit A une matrice diagonalisable à spectre positif possédant 0 comme valeur propre multiple. Prouver que A possède une infinité de racines carrées.

13. On note D la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

a. Donner (en raisonnant « à la main » !) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec D .

b. Quelle est la forme nécessaire d'une racine carrée de D ?

Déterminer *toutes* les racines carrées de D . Combien y en a-t-il ?

14. En adaptant la démarche suivie dans la question 13., prouver que la matrice Δ suivante ne possède pas de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

15. Soit A une matrice carrée diagonalisable à spectre positif et dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes. En adaptant ce qui précède, prouver que A possède un nombre fini de racines carrées et les expliciter toutes. Combien y en a-t-il ?

VI. Cas où $A = -I_n$.

16. a. Prouver que pour $n = 2$, la matrice $-I_2$ possède effectivement des racines carrées (on pourra raisonner géométriquement, en cherchant une transformation plane dont le carré est $-Id$).

b. En déduire que pour n pair, $-I_n$ possède des racines carrées (on pourra exhiber une telle racine carrée sous forme d'une matrice diagonale par blocs, en utilisant la question précédente).

c. Prouver que $\text{Rac}(-I_n) = \emptyset$ pour n impair.

17. Soit n un entier pair non nul ($n = 2p$), et u un endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que $u^2 = -Id$.

On construit par récurrence une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n de la façon suivante : on choisit un vecteur non nul e_1 , et on pose $\varepsilon_1 = u(e_1)$. Supposons alors construits, pour $k < p$, les vecteurs $e_1, \varepsilon_1, \dots, e_k, \varepsilon_k$. Cette famille ayant un cardinal strictement plus petit que n , il est possible de choisir un vecteur e_{k+1} qui ne soit pas dans $\text{vect}\{e_1, \varepsilon_1, \dots, e_k, \varepsilon_k\}$. On pose alors $\varepsilon_{k+1} = u(e_{k+1})$. On répète alors ce processus jusqu'à construire ainsi une famille $(e_1, \varepsilon_1, \dots, e_p, \varepsilon_p)$ de vecteurs de \mathbb{R}^n .

a. Prouver que la famille $(e_1, \varepsilon_1, \dots, e_p, \varepsilon_p)$ est une base de \mathbb{R}^n .

b. Écrire la matrice de u dans cette base, et en déduire la forme générale des matrices carrées R telles que $R^2 = -I_n$.