

Cours

Énoncer les deux conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée, ainsi que le théorème de décomposition des noyaux.

Vrai/faux

Les affirmations suivantes sont-elles justes ou fausses (on justifiera les réponses) ?

1. A est diagonalisable, donc le polynôme caractéristique de A est scindé-simple.
2. Une matrice réelle peut-être diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel possède toujours au moins une valeur propre.
4. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ étant symétrique, elle est diagonalisable.
5. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres d'une matrice carrée A , alors :
 - a. le polynôme caractéristique de A est $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$.
 - b. le polynôme annulateur de A est $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$.
 - c. le polynôme minimal de A est $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$.
6. Si A et B sont diagonalisables, alors :
 - a. A^2 est diagonalisable.
 - b. $A + B$ est diagonalisable.
 - c. A^{-1} est diagonalisable (en supposant A inversible, œuf corse !).
7.
 - a. 0 n'étant pas valeur propre de A , A est inversible.
 - b. 0 étant valeur propre de A , A n'est pas inversible.
8. 0 est la seule valeur propre de A , donc A est nilpotente.
9. Le spectre d'une matrice complexe A vérifiant $A^3 = I_n$ est $\{1, j, j^2\}$ et une telle matrice est diagonalisable.
10. Toute matrice carrée est équivalente à une matrice diagonale.

Petit problème

On donne la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -10 \\ -3 & -4 & -11 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1.
 - a. Calculer le polynôme caractéristique P_A de A .
 - b. A est-elle diagonalisable ?
 - c. Déterminer le polynôme minimal de A .
2.
 - a. Déterminer le noyau de $(A - I_3)^2$.
 - b. En déduire que A est semblable à la matrice B suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.
 - a. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec A .
 - c. Déterminer une matrice réelle R telle que $R^2 = A$.
4. On se donne dans cette question une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on se propose de déterminer s'il existe des matrices carrées P non nulles telles que $PA = CP$.

On suppose dans un premier temps (questions **a.**, **b.** et **c.**) que tel est le cas.

- a. Calculer PA^n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de P et de C .
- b. En déduire que la matrice $C^3 - 6C^2 + 9C - 4I_3$ n'est pas inversible.
- d. Prouver que 1 ou 4 est valeur propre de C .

On suppose, réciproquement, que 1 ou 4 est valeur propre de C (on supposera que 1 est valeur propre de C pour fixer les idées, le raisonnement serait le même si l'on supposait que c'est 4).

- e. Prouver que 1 est valeur propre de tA .
- f. On note X un vecteur propre de tA associé à la valeur propre 1, et Y un vecteur propre de C associé à la valeur propre 1. On pose enfin $P = Y{}^tX$. Prouver que P est non nulle et que $PA = CP$.

5. La matrice A peut-elle être semblable à :
 - a. une matrice symétrique ?
 - b. une matrice orthogonale ?
 - c. une matrice triangulaire inférieure ?
 - d. une matrice de diagonale nulle ?

6.
 - a. Prouver que la matrice A est semblable à $B_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

b. Prouver que la classe de similitude de A (*i.e.* l'ensemble des matrices semblables à A) n'est pas fermée.

7. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.