

Cours

Énoncer (avec précision !) les résultats suivants :

1. Règle de comparaison pour les suites équivalentes.
2. Théorème des séries alternées.
3. Somme de la relation $u_n \sim v_n$.
4. Théorème de Fubini.

Vrai/faux

Les affirmations suivantes sont-elles justes ou fausses (on justifiera les réponses) ? Dans certains cas, on pourra se demander dans quels cas particuliers importants certaines assertions fausses deviennent justes.

1. La suite (u_n) ne tendant pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.
2. $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la série $\sum u_n$ converge.
3. $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ est donc alternée, son terme général tend vers 0 et devient décroissant en valeur absolue, donc la série converge.
4. La série $\sum u_n$ converge, donc la série $\sum u_n^2$ aussi.
5. $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$, donc $e^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \sim n$
6. La série $\sum u_n$ étant divergente, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.
7. La série $\sum u_n$ converge, donc $\sum_{k=n}^{2n} u_k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
8. La série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ est de même nature que l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$, elle est donc divergente.
9. $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ donc la série $\sum u_n$ converge en vertu de la règle de d'Alembert.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$ soit convergente. Pour

$$n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } d_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

1. Prouver que la fonction f possède une limite finie en $+\infty$.

2. Prouver la convergence de la série $\sum_n \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$.

3. a. Prouver que $d_n = \int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t) dt$, et en déduire la convergence de la série $\sum d_n$.

b. On aboutit donc à une conclusion analogue à celle d'un théorème classique. Quel est-il et quelles en sont les hypothèses ? En quoi le résultat qui vient d'être prouvé est-il une généralisation de ce théorème ?

c. Prouver que la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)$ est convergente.

d. Étudier la série de terme général $u_n = \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 2

On étudie une suite de réels (u_n) vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n-1}}{n} u_{n-1}$.

Pour peu que u_n soit non nul, on posera $q_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$; il pourra alors être utile d'écrire la formule de récurrence vérifiée par la suite (q_n) .

1. On suppose que l'on a l'inégalité $\frac{1}{2} \leq q_3 \leq 2$.

a. Prouver alors que q_n existe pour tout entier $n \geq 3$, et que l'on a encore $\frac{1}{2} \leq q_n \leq 2$.

b. Prouver que l'on a les développements asymptotiques suivants :

$$q_{n+1} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ puis } q_{n+1} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

c. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

2. a. Prouver qu'il est possible de choisir u_0 et u_1 de telle sorte que $u_3 = u_4 = 1$. Que dire alors de la suite (u_n) ? Prouver de même qu'il est possible de choisir u_0 et u_1 de telle sorte que $u_3 = 1$ et $u_4 = 2$. Que dire alors de la suite (u_n) ?

b. Prouver que la suite (u_n) converge quelles que soient les valeurs de u_0 et u_1 .