SÉRIES (1)

1. Étudier les séries dont les termes généraux suivent :

a. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{\pi}{n}$ **b.** $\dfrac{e^{1/n}}{\sqrt[n]{n+1}}$ **c.** $\ln\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n+1}}$ **d.** $(1+\dfrac{1}{n})^n-e$ **e.** $\dfrac{\arctan n}{n+i}$

f. $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n^3+n}\ \cos\frac{1}{n}}$ **g.** $\dfrac{1}{n^{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\ln n})}}$ **h.** $(\pi/2)^{3/5}-(\arctan n)^{3/5}$ **i.** $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{k^2}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}$ **j.** $(\cos\dfrac{1}{n})^{n^2}$

k. $\arccos\dfrac{1}{n}-\arccos\dfrac{2}{n}$ **l.** $\dfrac{1}{n^\alpha}\ln(1+a^n)$ **m.** $\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}})$ **n.** $\dfrac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^\alpha}$ **o.** $e^{-\ln^3 n}$

p. $\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right]$ **q.** $\sqrt[4]{n^4+n}-\sqrt[3]{P(n)},\ P\in\mathbb{R}[X]$ **r.** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha>1)$ **s.** $n!^2\,x^{n!}$

t. $\ln\left[\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right]$ **u.** $\tan\left[\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\pi\right]$ **v.** $\arccos\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ **w.** $\dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ **x.** $\displaystyle\int_n^{2n}\frac{dt}{1+t\sqrt{t}}$

---

2. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes réels positifs. Étudier les séries suivantes :

$$\sum\frac{a_n}{1+a_n}\quad,\quad\sum\frac{a_n}{1-a_n}\quad,\quad\sum {a_n}^2\quad,\quad\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

---

3. Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes réels positifs. Étudier les séries suivantes :

$$\sum\frac{a_n}{1+n^2a_n}\quad,\quad\sum {a_n}^2\quad,\quad\sum\frac{a_n}{1+a_n}\quad,\quad(*)\sum\frac{a_n}{1+na_n}.$$

---

4. Convergence et somme des séries suivantes :

$$\sum\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\quad,\quad\sum\ln(\cos\frac{1}{2^n})\quad,\quad\sum\frac{\left[\sqrt{n+1}\right]-\left[\sqrt{n}\right]}{n}\quad,\quad\sum\frac{n^3+n-2}{n!}.$$

---

5. On considère trois suites de réels (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout n, $u_n\le v_n\le w_n$ et telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Prouver que la série $\sum v_n$ converge.

---

6. **a.** Nature et somme de la série de terme général $u_n=\ln 2-(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n+1})$.

b. Prouver que $v_n=\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$ peut s'écrire comme différence de deux arctangentes, et en déduire la somme de la série $\sum v_n$.

7. Étudier la série de terme général $u_n = \left[\dfrac{n}{n+1}\right]^{n^2}$, puis donner un équivalent de son reste d'ordre n.

8. On considère les séries (dites de Bertrand) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Prouver, en la comparant à la série harmonique, qu'une telle série diverge pour $\alpha < 1$.
b. Prouver, en la comparant à une série de Riemann bien choisie, qu'une telle série converge pour $\alpha > 1$.

9. Soit α un réel strictement positif. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. Étudier la série $\sum u_n$, et en cas de convergence, donner une expression de sa somme.

10. **a.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. On suppose que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, et que $u_n \sim v_n$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b. Étudier la série $\sum \dfrac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^3+1}-1)\ln n}$, i désignant le complexe de carré égal à -1.

11. Soit f une fonction numérique continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ de limite nulle en $+\infty$.

a. Prouver que la série de terme général $d_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite d'intégrales $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente.

c. Étudier les séries de Bertrand de la forme $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^a}$.

12. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ ait une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
a. Discuter, suivant la valeur de l, la nature de la série $\sum u_n$.
b. Comparer cette règle avec celle de d'Alembert.

13. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ ait une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
a. Discuter, suivant la valeur de l, la nature de la série $\sum u_n$.
b. Comparer cette règle avec celle de d'Alembert.

14. **a.** Déterminer, pour $|x| < 1$, la somme de la série $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ (utiliser une ruse du cours).

(**b**). Déterminer, pour $|x| < 1$, la somme de la série $\sum (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) x^n$.