INTRODUCTION AUX SÉRIES DE FOURIER

L'objectif de ce polycopié est de fournir une introduction à la théorie (très délicate quand on la creuse vraiment) des séries de Fourier. Nos ambitions se limiteront ici à fournir des résultats et des formules utilisables en Physique, tout particulièrement pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires, telle l'équation de la chaleur (cet exemple est traité dans la partie **8.**). Nous verrons d'ailleurs dans le paragraphe « Historique » que c'est précisément en vue de résoudre cette équation dans un cas particulier que Fourier a jeté les bases de cette théorie.

0. Calculs préliminaires : les relations d'orthogonalité

Soit n un entier positif. Il est évident que :

$$\text{si } n=0 \ : \ \int_0^{2\pi} \cos nt \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi \ ;$$

$$\text{si } n\neq 0 \ : \ \int_0^{2\pi} \cos nt \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi} = 0\,.$$

Soient alors p et q deux entiers positifs. Il est connu que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \cos pt \times \cos qt = \frac{1}{2}\left[\cos(p+q)t + \cos(p-q)t\right].$$

Si l'on intègre cette quantité entre 0 et 2π, il vient donc :

$$\int_0^{2\pi} \cos pt.\cos qt \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ p\neq q \\ \pi \ \text{ si } \ p=q\neq 0 \\ 2\pi \ \text{ si } \ p=q=0 \end{cases}.$$

Par des calculs en tous points analogues, on prouve aussi :

$$\forall p,q\in\mathbb{N}\,,\ \int_0^{2\pi} \cos pt.\sin qt \,\mathrm{d}t = 0\,,$$

$$\text{et } \int_0^{2\pi} \sin pt.\sin qt \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi \ \text{ si } \ p=q\neq 0 \\ 0 \ \text{ sinon.} \end{cases}$$

Toutes ces formules intégrales sont nommées *relations d'orthogonalité* : en effet, elles traduisent que pour le produit scalaire $(f,g)\mapsto \int_0^{2\pi} fg$ défini sur l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,2\pi]$, les fonctions $t\mapsto \cos pt$ et $t\mapsto \sin qt$ (par exemple) sont orthogonales entre elles.

1. Historique : la démarche de Fourier

Fourier étudie la loi donnant la température $f(t)$ en fonction du temps en un point d'un anneau métallique que l'on chauffe en son point le plus bas. Constatant que, sous certaines conditions, cette température évolue périodiquement (période que nous prendrons égale à 2π pour clarifier le propos), il a l'idée de représenter $f(t)$ comme une « combinaison linéaire infinie » des fonctions 2π-périodiques les plus simples, à savoir les fonctions $t\mapsto \cos nt$ et $t\mapsto \sin nt$ pour toutes les valeurs entières de n. Il écrit donc formellement, et sans aucune preuve qu'une telle représentation de f est possible :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,.$$

Mais Fourier connaît les relations d'orthogonalité évoquées plus haut. Son coup de génie est alors de multiplier l'égalité précédente par $\cos pt$, puis d'intégrer entre 0 et 2π (il va sans dire que, à la fin du XVIIIème siècle, personne ne se pose la question de savoir si l'on peut intégrer les sommes infinies comme les sommes finies : ça semble tomber sous le sens !). En intégrant terme à terme la série donnant $f(t)\cos pt$, toutes les intégrales sont nulles, sauf celle qui correspond à $n = p$. Fourier obtient alors :

$$\text{si } p \neq 0\,,\ \pi a_p = \int_0^{2\pi} f(t) \cos pt \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad 2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{d}t\,.$$

De la même façon, en multipliant par $\sin pt$ et en intégrant terme à terme, il trouve :

$$\text{si } p \neq 0\,,\ \pi b_p = \int_0^{2\pi} f(t) \sin pt \,\mathrm{d}t\,.$$

Fourier oublie alors un tout petit peu de se poser le problème de la légitimité de son raisonnement et affirme que, avec les valeurs intégrales précédemment trouvées pour les a_p et les b_p, la somme de la série trigonométrique $\sum (a_p \cos pt + b_p \sin pt)$ est bien $f(t)$!

2. Série de Fourier d'une fonction continue par morceaux

Il va sans dire que le raisonnement de Fourier ne résiste pas à l'analyse. Cependant, il n'est pas complètement à jeter non plus : en effet, si l'on souhaite représenter une fonction 2π-périodique $f(t)$ comme somme d'une série trigonométrique, le calcul purement formel de Fourier suggère que la série $\sum (a_p \cos pt + b_p \sin pt)$ (où les a_p et les b_p sont les valeurs intégrales qu'il a trouvées) *a de bonnes chances de marcher* [1] !

Envisageons l'espace vectoriel E des fonctions numériques continues par morceaux et 2π-périodiques. Pour $f \in E$, nous définissons les *coefficients de Fourier* de f par les formules intégrales suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \,\mathrm{d}t \\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t \end{cases}$$

La *série de Fourier* de f est alors la série de fonctions :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx]\,.$$

Le terme $\dfrac{a_0(f)}{2}$ se justifie par l'exception constatée pour $p = 0$ dans l'expression des a_p trouvée plus haut. On remarquera que ce « terme constant » de la série de Fourier vaut :

$$\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{d}t\,,$$

c'est-à-dire la **valeur moyenne** de f sur une période.

Notons que, pour l'instant, nous n'avons écrit la série de Fourier de f que de manière symbolique, rien ne permettant d'affirmer la convergence de cette série !

[1] Il existe cependant une autre raison, mathématiquement plus profonde, qui conduit à privilégier cette série sur les autres. Cet autre point de vue ne sera pas abordé ici.

Propriétés : soit f une fonction numérique continue par morceaux et 2π-périodique. Alors :

i. les suites de ses coefficients de Fourier tendent vers 0 ;

ii. l'intégrale de f est la même quel que soit l'intervalle de longueur 2π sur lequel on l'intègre.

Démonstration : le point *i.* n'est autre que le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à f (ce résultat a été prouvé pour les fonctions continues, mais reste vrai pour les fonctions continues par morceaux ; il suffit pour le généraliser ainsi de subdiviser le segment $[0,2\pi]$ en les sous-segments de continuité de f).

Le point *ii.* résulte quant à lui d'un simple changement de variable par translation, valable lui aussi bien que f ne soit que continue par morceaux (il suffit là encore de subdiviser les segments d'intégration) :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \underset{u=t-2\pi}{=} \int_0^a f(u+2\pi)\mathrm{d}u - \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u - \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = 0\,.$$

Ce dernier résultat est d'emploi constant : les coefficients de Fourier, tels qu'ils ont été définis, sont des intégrales de fonctions 2π-périodiques sur un intervalle de longueur 2π. Le choix des bornes d'intégration 0 et 2π est donc tout à fait arbitraire, et l'on aurait tout aussi bien pu choisir par exemple $-\pi$ et π.

Or, si l'on suppose par exemple f paire, la fonction $t \mapsto f(t)\sin pt$ est impaire, son intégrale entre $-\pi$ et π est donc nulle. Bref, on dispose du résultat suivant :

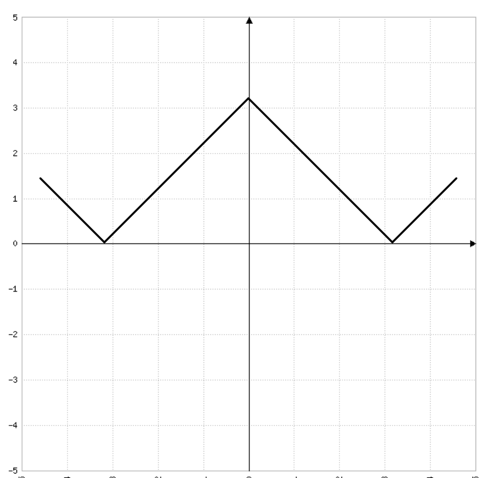
Propriété : soit f une fonction numérique continue par morceaux et 2π-périodique :

i. si f est paire, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0$: la série de Fourier de f ne comporte que des fonctions cosinus, c'est-à-dire des fonctions paires ;

ii. si f est impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$: la série de Fourier de f ne comporte que des fonctions sinus, c'est-à-dire des fonctions impaires.

3. Un exemple : fonction en triangle

Envisageons la fonction 2π-périodique, paire, et pour laquelle $f(t) = \pi - t$ pour $t \in [0,\pi]$:



f étant paire, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0$.

Par ailleurs, l'intégrale d'une fonction paire entre $-\pi$ et π étant le double de celle de cette fonction entre 0 et π, il vient :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\cos nt\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette intégrale se calcule bien par parties, mais cela engendre un cas particulier pour $n = 0$ (cette situation est d'ailleurs assez courante). Il vient alors :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-t)^2}{2}\right]_0^\pi = \pi \;\;;$$

$$\text{pour } n \neq 0 \;:\; \frac{\pi}{2}a_n(f) = \left[(\pi - t)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t = 0 - \left[\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2}\,.$$

On voit donc que les $a_n(f)$ sont nuls pour n pair, $n \neq 0$. Finalement, la série de Fourier de f est :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,.$$

4. Le théorème de Dirichlet

Soit f une fonction numérique 2π-périodique continue par morceaux, et N un entier. On cherche ici des conditions permettant d'affirmer la convergence de la série de Fourier de f en un point x de $\mathbb{R}$, de telle sorte que sa somme soit (on l'espère !) égale à $f(x)$. Comme nous allons le voir, la preuve du théorème qui s'ensuivra est assez élémentaire mais repose sur un calcul un peu technique. .

Soit $S_N(f)(x)$ la somme partielle de la série de Fourier de f en x. On a :

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt\cos nx + \sin nt \sin nx\Big)f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(t-x)\Big)f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable par translation $u = t - x$. La fonction intégrée étant 2π-périodique, on peut, comme on l'a vu plus haut, garder les bornes $-\pi$ et π de l'intégrale. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nu\Big)f(u+x)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nu\Big)f(u+x)\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nu\Big)f(u+x)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Cette fois-ci, on pose $v = -u$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nu\Big)f(-v+x)\mathrm{d}v + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nu\Big)f(u+x)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nu\Big)\left[f(u+x) + f(-u+x)\right]\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Mais un calcul trigonométrique tout à fait classique donne, pour $u \neq 0$:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nu=\frac{\sin(N+1/2)u}{2\sin u/2} \quad (\#)$$

D'où, finalement :

$$S_N(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}\big[f(x+u)+f(x-u)\big]\mathrm{d}u\,.$$

Nous sommes parvenus à une expression simple et exploitable de $S_N(f)(x)$. Revenons à la formule (#) et intégrons-la entre 0 et π. On obtient $\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(N+1/2)u}{2\sin u/2}\mathrm{d}u$ ce qui, multiplié par une constante A, donne :

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}A\mathrm{d}u\,.$$

Faisons l'hypothèse que f possède des limites à droite et à gauche en x et choisissons pour A la demie-somme de ces deux limites, c'est-à-dire $A=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Tous comptes faits, on a donc :

$$\begin{aligned}S_N(f)(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}\big[f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)\big]\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(N+1/2)u\,g(u)\mathrm{d}u\,,\end{aligned}$$

avec $g(u)=\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{\sin u/2}$.

Si l'on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à g, c'est gagné car on obtiendra que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(N+1/2)u\,g(u)\mathrm{d}u\underset{N\to+\infty}{\to}0$, c'est-à-dire que $S_N(f)(x)\underset{N\to+\infty}{\to}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Mais la fonction g est clairement continue par morceaux sur $]0,\pi]$, on aimerait donc qu'elle possède une limite finie en 0. Or :

$$g(u)=\frac{f(u+x)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{\sin u/2}\underset{0}{\approx}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u/2}+\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u/2}\,,$$

et l'on reconnaît la somme de deux taux d'accroissement de f en x, l'un par la droite et l'autre par la gauche. Le plus simple pour demander à g d'avoir une limite finie en 0 est donc de demander à f de posséder en x des dérivées à droite et à gauche.

On a finalement prouvé le théorème de Dirichlet dont l'énoncé suit, en établissant ses hypothèses au fur et à mesure des besoins.

> <u>Théorème de Dirichlet</u> : soit f une fonction numérique 2π-périodique continue par morceaux, et x un réel en lequel f possède des limites et des dérivées à droite et à gauche. Alors la série de Fourier de f en x est convergente, de somme $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (cette somme est donc égale à $f(x)$ si f est continue en x).

Remarquons que ces hypothèses de dérivabilité à droite et à gauche n'ont été que des hypothèses de confort permettant de conclure aisément notre raisonnement précédent ; mais elles peuvent être assez considérablement allégées. Cependant, une simple continuité de f en x ne saurait suffire puisque l'on sait construire des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un point. En revanche, ces fonctions sont sévèrement pathologiques et ne se rencontrent guère dans la nature ! Les hypothèses du théorème de Dirichlet, tel que nous l'avons cité, sont bien assez légères pour que ce résultat s'applique à toutes les fonctions que l'on rencontre en Physique.

5. La formule de Parseval

Contrairement au théorème de Dirichlet que nous venons de prouver, le théorème de Parseval (et non de « Perceval », navré pour les amateurs de Kaamelott) dont l'énoncé suit sera admis. Il résulte d'une présentation des séries de Fourier que nous avons évoquée en note plus haut, mais qui n'a pas été développée ici.

> Théorème de Parseval : soit f une fonction numérique 2π-périodique continue par morceaux. Alors les séries $\sum a_n(f)^2$ et $\sum b_n(f)^2$ sont convergentes, et l'on a :
> $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right].$$

On notera que ce résultat confirme le fait que les suites des coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux f tendent vers 0, mais en fournissant un renseignement plus précis. Par exemple, il ne peut exister de fonction dont les coefficients de Fourier valent $\frac{1}{\sqrt{n}}$, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

D'un point de vue mathématique, cette formule présente un autre intérêt : supposons en effet que f et g soient deux fonctions continues et 2π-périodiques possédant les mêmes coefficients de Fourier. Alors, comme les coefficients de Fourier dépendent linéairement de la fonction, $f-g$ a tous ses coefficients de Fourier nuls. Il en résulte que $\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))^2\mathrm{d}t = 0$ et comme la fonction intégrée est positive continue, elle est nulle. La fonction $f-g$ est donc nulle sur $[0,2\pi]$ et, par périodicité, elle est nulle sur $\mathbb{R}$.

> Théorème : deux fonctions numériques continues 2π-périodiques possédant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

6. Retour à l'exemple

La fonction en triangle évoquée dans la partie **3.** est continue et possède en tout point des dérivées à droite et à gauche. Le théorème de Dirichlet s'applique donc, et permet d'affirmer que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Attention toutefois à ne pas remplacer $f(x)$ par $\pi - x$, car l'on n'a $f(x) = \pi - x$ que pour x dans $[0,\pi]$!

Appliquée à $x=0$, cette formule donne $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Si l'on note S la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$, il vient en découpant S en la série de ses termes pairs et celle de ses termes impairs :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8},$$

d'où l'une des célèbres formules d'Euler :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Appliquons maintenant la formule de Parseval à f, en tenant compte de sa parité :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\,.$$

Mais $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=\left[-\frac{(\pi-t)^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}$, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

Notons alors T la somme de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^4}$ et raisonnons comme plus haut :

$$T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{1}{16}T+\frac{\pi^4}{96}\,,$$

d'où une autre formule d'Euler :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

NB : on peut, toujours grâce aux séries de Fourier, déterminer la valeur de la somme de toutes les séries de la forme $\displaystyle\sum\frac{1}{n^{2p}}$ *avec p entier plus grand que 1. Toutes possèdent une expression du type* $r_{2p}\pi^{2p}$ *où* r_{2p} *est un rationnel. Par exemple, on a :*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}}$$

En revanche, aucune somme de série de la forme $\displaystyle\sum\frac{1}{n^p}$ *avec p impair n'est connue !*

7. Cas des fonctions *T*-périodiques.

En Physique, les fonctions ne sont généralement pas 2π-périodiques ! On adapte alors les formules précédentes aux fonctions T-périodiques ($T>0$) en posant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} a_n(f)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \\ b_n(f)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

La *série de Fourier* de f est alors :

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\geq1}\left[a_n(f)\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n(f)\sin\frac{2\pi nx}{T}\right].$$

Il va sans dire que le théorème de Dirichlet reste inchangé. La formule de Parseval, quant à elle, devient (pour f continue par morceaux et T-périodique) :

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0(f)^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)^2+b_n(f)^2\right].$$

8. Exemple d'emploi : loi de température d'un fil

Soit un fil de longueur 1. On note $T(x,t)$ la température à l'instant t du point d'abscisse x du fil.

On suppose :

i. qu'à l'instant initial $t=0$, la loi de température des points du fil est connue :

$$T(x,0)=f(x)\ ;$$

ii. que les deux extrémités du fil sont maintenues à une température nulle :

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ T(0,t)=T(1,t)=0\,.$$

On sait (c'est de la Physique) que la fonction T que l'on cherche vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(C):\ \frac{\partial T}{\partial t}=c\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,,$$

où c est le *coefficient de diffusion thermique* du fil, exprimé en m^2/s. Nous prendrons $c=1$ pour simplifier (ça pour le coup, c'est plutôt le réflexe de confort d'un matheux !).

Une méthode classique (dite de séparation des variables) consiste dans un premier temps à chercher des solutions de l'équation (C) sous forme du produit d'une fonction de t par une fonction de x, de telle sorte que la condition *ii.* de température aux extrémités soit satisfaite ; elle permet de découvrir que les fonctions de la forme :

$$(x,t)\mapsto A_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

où A_n est une constante vérifient bien (C) et *ii.*

En revanche, à l'instant initial $t=0$, cette fonction vaut $A_n\sin(n\pi x)$, et il n'y a strictement aucune raison que la loi de température $f(x)$ soit de cette forme !

Imaginons alors que l'on étende f à $[-1,0]$ par imparité, puis à $\mathbb{R}$ en imposant à la fonction obtenue d'être 2-périodique. On obtient ainsi une fonction $\tilde{f}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ (en effet, on a $f(0)=f(1)=0$ puisque la température des extrémités du fil est maintenue à 0, le raccord par imparité puis par 2-périodicité se fait donc continûment… dessin !). Comme on fait de la physique, ce n'est pas un problème de supposer f dérivable. Finalement, la fonction $\tilde{f}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet et, étant impaire, elle peut s'écrire :

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\tilde{f})\sin(n\pi x)\,.$$

Finalement, la fonction f n'est pas de la forme $A_n\sin(n\pi x)$, mais elle est une somme infinie de fonctions de ce type. L'équation de la chaleur (C) étant linéaire, on peut tenter de « superposer » ses solutions élémentaires trouvées plus haut, et de postuler que la loi de température cherchée est :

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\tilde{f})\,\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)\,.$$

On vérifie alors réciproquement que (sous certaines hypothèses mathématiques peu restrictives d'un point de vue de la Physique) la fonction T ainsi posée vérifie bien toutes les conditions voulues au départ (mais ça, ce sont des maths : il faut dériver terme à terme la série définissant T, et il y a pour ce faire des théorèmes très précis !). On a trouvé la loi de température des points du fil.

<u>Remarque 1</u> : en réalité, nous n'avons pas trouvé LA mais UNE loi de température du fil satisfaisant l'équation de la chaleur et les conditions aux limites imposées. On peut cependant prouver (dans ce cas-ci, mais ce n'est pas toujours vrai) que la solution cherchée est unique. Celle que nous avons trouvée est donc la bonne.

<u>Remarque 2</u> : la formule donnant $T(x,t)$ prouve que, quand $t\to+\infty$, la température en tout point du fil tend vers 0 qui est la température fixe en ses extrémités… cela semble plutôt naturel !