XMP 2022-2023

SÉRIES ENTIÈRES (1)

Dans toute cette feuille d'exercices, z désignera une variable complexe, et x une variable réelle.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes ;

a. $\sum(\sqrt{n}+2)z^n$ **b.** $\sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{\ln n} z^n$ **c.** $\sum \cos\frac{n\pi}{17} z^n$ **d.** $\sum [\mathrm{e}^n] z^n$ **e.** $\sum \frac{\ln n}{n} z^{3n+2}$

f. $\sum \cos\frac{n\pi}{17} z^{2n+1}$ **g.** $\sum (n!)^2 z^{n!}$ **h.** $\sum n^{\ln n} z^n$ **i.** $\sum \binom{kn}{n} z^n$ **j.** $\sum n^{(-1)^n} z^{n^2}$

2. **a.** Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) z^n$.

3. On se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Que dire des rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum a_n z^{2n} \quad ; \quad \sum {a_n}^2 z^n \quad ; \quad \sum \frac{a_n}{n^2+1} z^n \quad ; \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n \ (R \neq 0) \quad ; \quad \sum \frac{z^n}{a_n} (a_n \neq 0 \ \forall n).$$

4. Rayon de convergence et somme des séries entières suivantes :

$$\sum \cos n\, z^n \quad ; \quad \sum \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)} \quad ; \quad \sum n^2 x^n \quad ; \quad \sum \frac{x^n}{2n+1} \quad ; \quad \sum \frac{x^{3n}}{(3n)!} \quad ; \quad \sum (1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}) x^n \quad .$$

5. **a.** Soit le polynôme $P(X)=(1+X)^3$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$.

b. Déterminer des réels a, b, c, d tels que : $P(x)=aX(X-1)(X-2)+bX(X-1)+cX+d$.

c. En déduire que la somme de la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$ est de la forme $Q(z)\mathrm{e}^z$ où Q est un polynôme.

d. Plus généralement, P désignant un polynôme complexe quelconque, prouver que la somme de la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$ est de la forme $Q(z)\mathrm{e}^z$ où Q est un certain polynôme.

6. Soit u_n la $n^{\text{ème}}$ décimale de $1/7$. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum u_n x^n$.

7. **a.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$; on note $S(x)$ sa somme.

b. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et préciser le rayon de convergence.

c. Déterminer $S(x)$.

d. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0)=1\,,\ f(x)=\operatorname{ch}\sqrt{x} \ \text{ si } \ x>0\,,\ f(x)=\cos\sqrt{-x} \ \text{ si } \ x<0\,.$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Minorer le rayon de convergence R de la série entière $\sum S_n x^n$, et calculer, quand c'est possible, sa somme $S(x)$ en fonction de $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donner alors la valeur exacte de R.

9. Développer en série entière les fonctions suivantes :

a. $\ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)$ **b.** $\frac{e^x}{2-x}$ **c.** $\arcsin x$ **d.** $e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$

e. $\arctan(x+1)$ **f.** $\frac{\cos x}{1+x^{5/3}}$ **g.** $\operatorname{sh}(e^{-x})$ **h.** $\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$

10. **a.** Prouver que l'application $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$, convenablement prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire que l'application $g : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$, convenablement prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. On désire maintenant prouver que g est développable en série entière sur $]-1,1[$. Prouver que si g est somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-h,h[$ (h non nul), alors les a_n satisfont les formules de récurrence :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n + \dfrac{a_{n-1}}{2!} + \ldots + \dfrac{a_0}{(n+1)!} = 0 \quad \forall n > 0. \end{cases}$$

c. Prouver que le "système infini" (S) possède une unique suite solution (α_n) et que l'on a pour tout n : $|\alpha_n| \leq 1$.

d. Conclure soigneusement.

11. On définit une suite (u_n) par la donnée de $u_0 = 1$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

a. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

b. On fait momentanément l'hypothèse que la série entière $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Prouver que sa somme est solution d'une certaine équation du second degré.

c. On envisage la fonction g définie sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ par $g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = ???$

Prouver que g est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, et expliciter ce développement (que l'on notera formellement $\sum a_n x^n$).

d. Prouver que la suite (a_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n), puis en déduire que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n$.

e. Prouver que a_n est le nombre de parenthésages possibles pour un produit, au sens d'une loi non associative, de $n+1$ termes.

12*. Calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.