# SÉRIES ENTIÈRES (2)

---

**1.** **a.** Développer en série entière $\sqrt{1+x}$ pour $x$ réel de $]-1,1[$. On note $\sum a_n x^n$ ce développement.

**b.** Calculer, pour $z$ complexe de module strictement plus petit que 1, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)^2$.

**c*.** On pose, pour $|z|<1$, $S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Prouver que $\mathrm{Re}(S(z))\neq 0$. En déduire que $\mathrm{Re}(S(z))>0$ pour tout complexe $z$ de module strictement plus petit que 1 (on sait donc à laquelle des deux racines carrées de $1+z$ est égale $S(z)$ ).

---

**2.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>1$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$.

**a.** Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum S_n z^n$ est supérieur ou égal à 1, inférieur ou égal à $R$, et calculer la somme de cette série pour $|z|<1$.

**b.** On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \neq 0$. Prouver que le rayon de convergence de $\sum S_n z^n$ vaut 1.

**c*.** On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$, et l'on pose $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum R_n z^n$ et en déduire celui de $\sum S_n z^n$.

---

**3.** <u>Un théorème de Bernstein</u>

Une fonction numérique $f$ définie sur un intervalle $[0,A[$ est dite *absolument monotone* sur cet intervalle si $f$ y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}\geq 0$. On se propose dans cet exercice de prouver qu'une fonction $f$ absolument monotone sur $[0,A[$ est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x\in[0,A[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

**a.** Pour quelles valeurs du réel $\alpha$ la fonction $x\mapsto x^\alpha$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

**b.** Prouver que pour tout $x$ de $[0,A[$ et pour tout entier $n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leq f(x) .$$

En déduire que la série $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est convergente.

**c.** On fixe un réel $x$ dans $[0,A[$, et on envisage un réel $B$ vérifiant $x<B<A$.

*i.* Prouver que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,B[,\ f^{(n)}(t)\leq n!\dfrac{f(B)}{(B-t)^n}$.

*ii.* Étudier sommairement les variations de la fonction $h$ définie sur $[0,x]$ par : $h(t)=\dfrac{x-t}{B-t}$.

*iii.* Majorer le reste intégrale dans la formule de Taylor écrite à l'ordre $n$ entre 0 et $x$.

*iv.* Prouver que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

**d.** Prouver que la fonction tangente est absolument monotone sur $[0, \pi/2[$ . Qu'en déduire ?

---

**4**** Théorème de Tauber

Soit $(a_n)$ une suite de réels ou de complexes, telle que la suite $(na_n)$ tende vers zéro. On suppose que $\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ existe et vaut $S$. Prouver que la série $\sum a_n$ est convergente, de somme $S$ (on pourra évaluer, pour $N$ entier, la différence $\sum_{k=0}^{N} a_k - f(1 - \frac{1}{N})$ où $f$ désigne la somme de la série entière).

---

**5.** Théorème de Liouville

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$ non nul (éventuellement infini), et $f$ sa fonction somme définie sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $R$ du plan complexe.

On fixe dans cette question un réel $r$ élément de $[0, R[$ . On se propose de prouver l'égalité, et d'en déduire un résultat important :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| a_n \right|^2 r^{2n} .$$

**a.** Prouver que la série $\sum \left| a_n \right|^2 r^{2n}$ est convergente (ce n'est pas indispensable pour traiter la question suivante).

**b.** Pour $\theta$ élément de $[0, 2\pi]$, représenter, grâce à un produit de Cauchy, $\left| f(re^{i\theta}) \right|^2$ comme somme d'une série.

Prouver que cette série peut être intégrée terme à terme par rapport à $\theta$, et en déduire le résultat demandé.

**c.** On pose, toujours pour $r$ élément de $[0, R[$ , $M(r) = \sup_{|z|=r} \left| f(z) \right|$.

Prouver, pour tout entier $n$, l'inégalité de Cauchy : $\left| a_n \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ .

**d.** On suppose dans cette question que $R$ est égal à $+\infty$ , et que $f$ est une fonction bornée sur $\mathbb{C}$ . Prouver que $f$ est constante (c'est ce résultat qu'un historien des sciences, bourré ou incompétent, a nommé *le théorème de Liouville*, alors qu'il est dû à 100% à Cauchy…).

---

**6.** Soit $S(n, p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à $n$ éléments sur un ensemble à $p$ éléments $\{a_1, \dots, a_p\}$ .

**a.** Prouver que $S(n, p) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_p = n \\ k_i \geq 1}} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!}$ .

**b.** Prouver que pour tout réel $x$, on a : $e^{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{S(n, p)}{p!}$ .

---