TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$, SUITES NUMÉRIQUES

1. Étant données deux parties non vides et majorées X et Y de $\mathbb{R}$, on pose $X+Y=\{x+y,\, x\in X,\, y\in Y\}$.

a. Prouver que $X+Y$ est majorée et que $\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y$.

b. Prouver l'existence d'une suite d'éléments de X qui converge vers $\sup X$.

2. Soit $u=(u_n)$ une suite de réels. On suppose que u est non bornée, par exemple non majorée.

a. Peut-on affirmer que u tend vers $+\infty$?

b. Construire par récurrence une suite d'entiers strictement croissante $(\varphi(p))$ telle que $\forall\, p\in\mathbb{N},\, u_{\varphi(p)}\geq p$ (on a ainsi prouvé l'existence d'une suite extraite de u tendant vers $+\infty$).

3. Soit (u_n) une suite de réels.

a. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ au sens de Cesàro, c'est-à-dire que $m_n=\dfrac{1}{n}(u_1+\ldots+u_n)$ tend vers l. Prouver que (u_n) est convergente de limite ℓ.

c. En adaptant la preuve du théorème de Cesàro, prouver que si la suite (u_n) converge vers $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{1+2+\ldots+n}$ converge encore vers ℓ. Quelle est alors la limite de $w_n=\dfrac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n^2}$?

4. Pour n entier non nul, on pose $s_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

a. En remarquant que $\dfrac{1}{k}=\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t$, déterminer la limite de la suite (s_n).

b. Déterminer de la même façon la limite de la suite $\pi_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

c. Donner une autre preuve de la convergence de la suite (s_n).

5. **a.** On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n\sim v_n$. Prouver que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n=\mathrm{sh}\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}$.

6. Étudier les suites définies par :

a. $u_0\in\mathbb{R},\, u_{n+1}=\ln(1+u_n)$ (on envisagera d'abord le cas où $u_0>0$).

b. $u_0,u_1>0$, $u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}u_n}$ (on réfléchira).

c. $u_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\tan\left(\frac{p^2}{n^3}\right)$ (on donnera au préalable un encadrement fin de la tangente).

d. Programmer sur une calculette la suite $u_0=1/7$ et $u_{n+1}=1-6u_n$. Qu'en conclure ?

e*. On note T_n le nombre de nombres d'exactement n chiffres (en numérotation décimale) ne comportant pas la séquence 13. Montrer que $T_{n+2}=10T_{n+1}-T_n$ et en déduire la valeur de T_n.

7. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est monotone, et déterminer sa monotonie en fonction du signe de x_0.

b. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

c. Déterminer toutes les fonctions continues h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

---

8. On définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 dans $\mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2}{3-u_n}$.

a. On suppose que u_0 est tel que la suite soit entièrement définie. Quelles sont ses limites possibles ?

Prouver que si $u_0 \neq 2,\quad u_n \neq 2\ \forall n$. On pose alors $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$.

Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Achever alors l'étude de la suite (u_n).

b. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle entièrement définie ?

9*. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.

En calculant un certain nombre de termes de la suite (u_n) sur machine ou dans un tableur, conjecturer une double inégalité vérifiée par u_n. Prouver alors cette double inégalité et donner un équivalent de u_n.

---

10. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel a en lequel f est dérivable et tel que $f(a) = a$.

a. On suppose $|f'(a)| < 1$. Prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ et d'un réel $k \in [0,1[$ tels que :

$$\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha],\ |f(x) - f(a)| \leq k|x-a|.$$

Que peut-on dire d'une suite définie par $u_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$?

b*. On suppose $|f'(a)| > 1$, et l'on construit une suite (u_n) avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite (u_n) converge vers a mais que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq a$. En envisageant $q_n = \left|\dfrac{u_{n+1}-a}{u_n - a}\right|$, conclure à une impossibilité. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (u_n) converge vers a.

---

11. On fixe donc un réel strictement positif a, et on définit par récurrence une suite (u_n) en choisissant $u_0 \geq \sqrt{a}$ (ce qui est facile grâce à une première évaluation grossière de $\sqrt{a}$), et en posant :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right).$$

a. Donner une relation simple liant $u_n - \sqrt{a}$ et $u_{n-1} - \sqrt{a}$.

b. Prouver que pour tout entier n, on a $u_n \geq \sqrt{a}$, puis que :

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \frac{\left|u_{n-1} - \sqrt{a}\right|^2}{2\sqrt{a}}.$$

c. En déduire, pour tout entier n, la majoration :

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq 2\sqrt{a}\left|\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right|^{2^n}$$

d. Que faut-il penser de cette majoration ?

e. On choisit $a = 2$ et $u_0 = 1{,}5$. Prouver que u_{10} donne $\sqrt{2}$ avec plus de 1000 décimales exactes !!!

f*. Comment a-t-on bien pu inventer cette suite ?
