XMP 2022-2023

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$ **b.** $g_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}$ **c.** $h_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin x$ sur $\mathbb{R}$

d. $j_n(x) = \sin(\dfrac{n+1}{n}x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ **e.** $k_n(x) = nx^n \ln x$ sur $[0,1]$ **f.** $l_n(x) = \dfrac{\sin nx}{x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément. Que dire de la suite $(\dfrac{f_n}{1+f_n^{\,2}})$?

Plus généralement, que doit-on supposer sur une fonction h pour pouvoir affirmer que la suite $(h\circ f_n)$ converge simplement ? uniformément ?

b. Soit (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f. Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite $(f_n\circ f_n)$.

c. La limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est-elle uniformément continue ?

3. **a.** Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$. Prouver l'implication :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément $\Rightarrow$ la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0.

b. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 0$, $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Cette convergence est-elle uniforme ?

4. On définit par récurrence sur $I = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ une suite de fonctions en posant $f_0 = 0$ et pour $n\geq 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver que $|f_n(x)| \leq 5/6$ pour tout x de I.

b. Prouver que pour tout $n\geq 1$, on a $\|f_{n+1}-f_n\|_\infty \leq 5/6\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$

c. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum(f_{n+1}-f_n)$?

Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I. Soit f sa limite.

d. Prouver que f est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = x^2+y^2$ satisfaisant à $f(0)=0$.

5. On définit une suite de polynômes sur $[0,1]$ par :

$$P_0 = 0 \quad ; \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}\,.$$

a. Prouver que pour tout entier n et pour tout x de $[0,1]$, on a $0\leq P_n(x)\leq\sqrt{x}$.

b. En déduire la convergence simple de la suite (P_n) vers une limite que l'on précisera.

c*. Prouver que cette convergence est uniforme.

6. Prouver que l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\arctan(n+x) - \arctan n\right).$$

Donner une relation liant $f(x+1)$ et $f(x)$, et déterminer la limite de f en $+\infty$.

7. On pose, quand c'est possible, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

a. Donner le domaine de définition de *f*, prouver que *f* est continue, et qu'elle décroît sur $\mathbb{R}^+$; limite en $+\infty$?
b. Donner, par comparaison avec une intégrale, un encadrement de $f(x)$. Équivalent de *f* en $+\infty$?
c.*Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$.

8. On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n(x) = \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$. En cas de convergence, sa somme sera notée *S*.

a. Prouver que *S* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
b. Calculer $S'(1)$.

9.* <u>Second théorème de Dini</u>
Soit (f_n) une suite de fonctions numériques croissantes sur $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction continue *f*. Prouver que *f* est croissante et que la convergence est uniforme.

10. On pose, quand c'est possible, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de *g*.
b. Prouver que *g* est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. Prouver que la quantité $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur $\mathcal{D}$.
d. Prouver que *g* est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
e. Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.

11. Pour $x > 0$, on pose $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a. Donner une relation reliant $\psi(x)$ et $\zeta(x)$ pour $x > 1$.
b. Prouver que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa dérivée (attention !).
c. Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

12. On pose, pour *x* élément de $]1,2]$ et $n > 0$, $u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

a. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]1,2]$ et exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ.
b. Déterminer la limite en 1 de la fonction u_n et en déduire $\lim_{x \to 1+} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right)$.

13. Soit *E* l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ que l'on munit de la norme n_∞. On note *C* l'ensemble des fonctions de *E* qui ne sont dérivables en aucun point et *on admet* que *C* n'est pas vide. Prouver que *C* est dense dans *E*.

14. Construire une série de fonctions *positives* convergeant uniformément et pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.