On désigne par U l'ouvert suivant de $\mathbb{R}^2$: $U =]0,1[\times]0,+\infty[$, et par $\overline{U} = [0,1]\times[0,+\infty[$ son adhérence. Soit c une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ *fixée dans toute la partie*. On appelle *solution* du problème $\mathcal{DP}$ une fonction numérique f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, se prolongeant à $\overline{U}$ en une fonction continue, et vérifiant les conditions (1), (2) et (3) suivantes :

$$(1) \quad : \quad \forall (x,t)\in U, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad ;$$
$$(2) \quad : \quad \forall t \geq 0, \quad f(0,t) = f(1,t) = 0 \quad ;$$
$$(3) \quad : \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x,0) = c(x).$$

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence et l'unicité d'une solution au problème $\mathcal{DP}$, et d'expliciter cette solution sous forme d'une série.

1. **a.** Soit a un réel positif. À quelle condition sur le réel la fonction $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-at}\sin \omega x$ est-elle solution sur U de l'équation aux dérivées partielles (1) ?

b. À quelles conditions sur a et sur la fonction $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-at}\sin \omega x$ vérifie-t-elle les conditions (1) et (2) ? Que vaut alors $f(x,0)$ pour $x \in [0,1]$?

2. **On admet** (c'est un résultat issu de la théorie de Fourier) l'existence d'une suite de réels (b_n) telle que :

$$\textit{i.}\ \forall x \in [0,1], \quad c(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x \ ;$$

ii. la série $\sum b_n$ converge absolument.

a. On pose, pour $(x,t)\in\overline{U}$, $g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$.

Prouver que la fonction g est bien définie sur $\overline{U}$ et qu'elle y est continue.

Montrer que la fonction g vérifie les conditions (2) et (3).

b. Justifier qu'à x fixé, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable t sur $]0,+\infty[$, et calculer sa dérivée (donc la dérivée partielle de g par rapport à t).

On admettra que, de la même façon, on peut dériver deux fois g sous le signe Σ par rapport à x.

c. Conclure.

3. Soient f_1 et f_2 deux solutions du problème $\mathcal{DP}$, et $f = f_1 - f_2$.

a. Montrer que f vérifie les conditions (1) et (2), et calculer $f(x,0)$ pour $x \in [0,1]$.

b. On pose, pour $t > 0$, $I(t) = \int_0^1 f^2(x,t)\mathrm{d}x$.

c. Prouver que I décroît sur $[0,+\infty[$.

d. Prouver que $I = 0$ et conclure.

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence