TOPOLOGIE DES ESPACES NORMÉS (Feuille 2)

1. **a.** Soit X une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Prouver que l'application qui à un point x de E associe sa distance à X est 1-lipschitzienne (on rappelle que $d(x,X) = \inf_{a \in X} d(x,a)$).

b. La fonction $x \mapsto \sin 1/x$ est-elle uniformément continue sur $]0,1]$?

c. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ possédant une limite finie en $+\infty$. Prouver que f est uniformément continue (on pourra régler le problème au voisinage de l'infini, puis invoquer le théorème de Heine).

d*. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Prouver l'existence de deux réels a et b tels que :

$$\forall x \geq 0, \left|f(x)\right| \leq ax + b \,.$$

2*. Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E, et f une application de K dans K vérifiant :

$$(\#) : \forall x, y \in K,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)\,.$$

a. Prouver que l'application $h :\ x \mapsto d\left(f(x), x\right)$ est 2-lipshitzienne sur K.

b. En considérant un point de K en lequel h atteint sa borne inférieure (?), prouver que f possède un point fixe. Prouver que celui-ci est unique.

c. Construire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'axiome (#) mais ne possédant pas de point fixe.

---

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ supposée injective.

a. On pose $T = \left\{(x,y) \in I \times I \,/\, x < y\right\}$. Prouver que T est connexe par arcs.

b. Soit $g : \begin{cases} I \times I \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x) - f(y) \end{cases}$.

Quelle propriété possède g du fait de l'injectivité de F ?

c. Prouver que f est strictement monotone.

---

4. **a.** Prouver que le plan complexe, privé d'un nombre fini de points, est connexe par arcs.

b. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposées inversibles.

On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \det\left(zA + (1-z)B\right)$.

Que peut-on dire de $f(0)$ et de $f(1)$?

Quelle particularité de f permet d'affirmer qu'elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois ?

Prouver que le groupe linéaire $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

---

5. Soit f une application numérique continue sur le cercle unité $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$.

a. Prouver que $f(\mathcal{U})$ est un segment de $\mathbb{R}$.

b. On suppose f injective (f n'est donc pas constante !). Soit a un point de $\mathcal{U}$ tel que $f(a)$ ne soit pas une extrémité de $f(\mathcal{U})$. Que peut-on dire de $f(\mathcal{U} - \left\{a\right\})$? Conclure.

---

6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$. On munit E de la norme infinie relative à cette base. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i. La suite (u_n) converge vers un certain endomorphisme u de E au sens de la norme subordonnée ;

ii. Pour tout x de E, la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$;

iii. Pour tout entier $k \in [[1,n]]$, la suite $(u_n(e_k))$ converge vers $u(e_k)$.

7. Soit E un espace vectoriel normé. On cherche s'il est possible de trouver deux endomorphismes f et g de E tels que $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

a. Résoudre le problème en dimension finie grâce à la trace.

b. On suppose f et g continues. Prouver que $f \circ g^{k+1} - g^{k+1} \circ f = (k+1)g^k$ pour tout entier positif k. En déduire (attention, on n'est pas en sixième, merci...) que $k+1 \leq 2|||f||| \times |||g|||$, puis conclure.

---

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et u une forme linéaire sur E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$). On pose $H = \ker u = \left\{ x \in E \ / \ u(x) = 0 \right\}$.

a. On suppose que u est continue. Prouver que H est fermé.

b. On suppose que u n'est pas continue. Prouver que E n'est pas de dimension finie. Prouver l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de E tels que $\left\| x_n \right\| = 1$ pour tout n et tels que la suite $\left(\left| u(x_n) \right| \right)$ tende vers $+\infty$.

c. Pour $a \in E$, on pose $a_n = a - \dfrac{u(a)}{u(x_n)} x_n$. Prouver que la suite (a_n) est une suite de points de H convergeant vers a. Qu'a-t-on prouvé ?

---

9. **a.** Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\,|\,)$, et a un élément de E. Prouver que l'application de E dans $\mathbb{R}$ $x \mapsto (a|x)$ est continue et calculer sa norme subordonnée

b. On considère l'espace E des suites bornées de réels muni de la norme (?) : $N : u \mapsto \left| u_0 \right| + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left| u_n \right|}{n^2}$.

Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $u \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$ est continue.

c. On considère l'espace E des suites bornées de réels muni de la norme (?) : $N : u \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left| u_n \right|}{2^n}$.

Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $u \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^2}$ n'est pas continue.

d. Pour tout polynôme complexe P, on pose $\left\| P \right\| = \sup\limits_{|z| \leq 1} \left| P(z) \right|$.

Prouver l'existence d'une constante k telle que pour tout polynôme de degré plus petit que n, on ait $\left\| P' \right\| \leq k \left\| P \right\|$.

Prouver que $k \geq n$ (*N.B* : on peut prouver, mais c'est assez délicat, que $k = n$ convient).

e. On munit l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ de la norme n_1. On note T l'endomorphisme de E qui à un élément f associe la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x de $[0,1]$.

Prouver que T est continu et majorer sa norme. Calculer la norme de T (considérer $f_n : t \mapsto n(1-t)^{n-1}$).

Prouver que pour tout élément f de E, on a $\displaystyle\int_0^1 T(f)(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x$. Existe-t-il des éléments non nuls f de E tels que $n_1(f) = n_1(T(f))$?
