TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS (Feuille 1)

1. Comparer les couples de normes (?) suivants :

a. Sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la norme n_∞ et la norme (?) n définie par :

$$n : f \mapsto |f(0)| + \sup_{0\le t\le 1} |f'(t)|.$$

b. Sur l'espace des suites bornées de réels, les normes (?) définies par $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n^2+1}$ et $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

2. Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$. On pose, pour f dans E :

$$n_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad n_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

a. Prouver que n_∞ et n_1 définissent deux normes sur E, et que ces normes ne sont pas équivalentes.

b. Expliciter une constante k telle que $n_1(f) \le k\, n_\infty(f)$ pour tout f de E.

c. Démontrer que tout ouvert pour la norme n_1 est ouvert pour la norme n_∞.

3. Soit $I = [a,b]$ un segment non trivial de $\mathbb{R}$, et E l'espace des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Justifier brièvement que l'application N_I suivante est une norme sur E :

$$N_I : P \mapsto \sup_{t\in I} |P(t)|.$$

b. Comparer les normes N_I et N_J ainsi obtenues pour $I = [0,1]$ et $J = [1,2]$.

c. Soit, plus généralement, une partie non vide X de $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $N_X : P \mapsto \sup_{t\in X} |P(t)|$ définisse une norme sur E :

4. On note E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N(f) = n_\infty(f) + n_\infty(f') \ \text{ et } \ \|f\| = n_\infty(f + f').$$

a. Prouver que les applications N et $\| \ \|$ définissent des normes sur E.

b. Soit $f \in E$, et g la fonction définie par $g(x) = f(x)\mathrm{e}^x$. Majorer g' en fonction de $\|f\|$, et en déduire une majoration de $n_\infty(f)$ en fonction de $\|f\|$. Prouver enfin que les normes N et $\| \ \|$ sont équivalentes.

5. Soit (x_n) une suite convergente de limite a d'un espace vectoriel normé E. On pose $F = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$.

Soit x un élément de E qui n'est pas dans F, et $r = \|x - a\|$. Prouver l'existence d'un entier N tel que $\forall n \ge N, \|x_n - x\| \ge \frac{r}{2}$. En déduire l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \cap F = \varnothing$. Qu'a-t-on prouvé ?

6. Soit E un espace vectoriel normé.

a. On définit la somme de deux parties A et B de E par $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$.

La somme de deux ouverts est-elle un ouvert ? Même question avec deux compacts, puis deux fermés.

b. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est d'intérieur non vide. Prouver alors que F contient une boule centrée en 0, puis que $F = E$.

c. Soit (F_n) une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de compacts non vides. Prouver que l'intersection des F_n est non vide. Quel théorème classique ce résultat rappelle-t-il ?

7. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels.

a. Pour $P \in E$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{k=0,\ldots,n} |a_k|$.

Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est ouvert pour la norme N_1.

c. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

8. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E.

a. Rappeler la définition de l'adhérence d'une partie de E.

b. Prouver que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

c. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*Remarque :* une réponse sans les suites est aussi acceptée).

d. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, et que cette inclusion peut être stricte (on prendra $E = \mathbb{R}$).

10. E désigne l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, muni de la norme infinie. Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés ?

a. L'ensemble des fonctions nulles en 0.

b. L'ensemble des fonctions croissantes, puis l'ensemble des fonctions monotones.

c. L'ensemble des fonctions dérivables.

11. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? compacts ?

a. L'ensemble des matrices de trace nulle.

b. L'ensemble des matrices nilpotentes ?

c. L'ensemble des matrices diagonalisables ?

12. On désigne par E l'espace constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\| = |f(0)| + n_\infty(f').$$

a. Prouver que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E.

b. Prouver que l'on a $n_\infty(f) \le \|f\|$ pour tout élément f de E.

c. Prouver que n_∞ et $\| \ \|$ ne sont pas équivalentes sur E (envisager les applications $p_n : t \mapsto t^n$).

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n\pi x)$.

d. Prouver que la suite (f_n) converge vers la fonction nulle au sens de la norme n_∞.

e. On note ℓ_n la longueur de la courbe représentative de f_n. Prouver l'inégalité $\ell_n \ge \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$ (on pourra utiliser l'inégalité $|\cos u| \ge \cos^2 u$ ainsi que l'identité $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$).

f. En déduire que si l'on munit l'espace E de la norme n_∞, l'application $f \mapsto L(f)$ qui à un élément f de E associe la longueur de son graphe n'est pas continue.

Soit f_0 un élément fixé de E.

g. Prouver que pour tout élément f de E vérifiant $\|f - f_0\| \le 1$, on a $|L(f) - L(f_0)| \le (2\|f_0\| + 1)\|f - f_0\|$.

h. Que peut-on en déduire concernant l'application $f \mapsto L(f)$ si l'on munit E de la norme $\| \ \|$?