VARIABLES ALÉATOIRES (1)

1. **a.** Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la série $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge pour tout $x \in]-1,1[$ et calculer sa somme.

Soient $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$. On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte, le premier rayon étant envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que quand elle a été touchée r fois par le rayon. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

b. Déterminer la loi de X.

c. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

---

2. Une boîte contient n numéros compris entre 1 et n (n pair). On tire au hasard l'un des numéros. On peut soit le conserver, soit le remettre dans la boîte pour un tirer un autre si on le juge trop faible. On note X le numéro final obtenu.

Stratégiquement, on choisit une barre b telle que, si le premier numéro tiré est inférieur ou égal à b, on effectue un second tirage, sinon on le conserve.

a. Déterminer la loi de X (on distinguera les cas $k \leq b$ et $k > b$).

b. Calculer l'espérance de X. Comment choisir b pour que cette espérance soit maximale ? Que vaut-elle alors ?

---

3. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec une probabilité p. On a pour cela deux méthodes :

Méthode 1 : on analyse le sang de chacune des N personnes ;

Méthode 2 : on regroupe les N individus en g groupes de n individus, et on mélange le sang des n individus d'un groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on analyse alors le sang des n individus du groupe.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire réelle X égale au nombre de groupes positifs.

b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode.

c. Comparer les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0{,}01$.

---

4. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

a. On définit une nouvelle variable aléatoire par $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Déterminer l'espérance de Y.

b. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$ et l'on pose $Z = \dfrac{a^X}{2n}$ $(a > 0)$. Déterminer l'espérance de Z.

---

5. X désigne une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et G sa fonction génératrice.

a. Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$ et en déduire une majoration de $P(X \geq 2\lambda)$.

b. Montrer que pour tout réel $t \geq 1$ et pour tout $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{G(t)}{t^a}$.

En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq (\dfrac{e}{4})^\lambda$.

c. Des inégalités obtenues aux questions **a.** et **b.**, laquelle est-elle la meilleure ?

6. On effectue N lancers d'un dé équilibré. Si n est le nombre de six obtenus, on lance n fois une pièce dont la probabilité de faire Pile vaut $p \in]0,1[$. Soit Z le nombre de six, X le nombre de Pile et Y le nombre de Face.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

b. En conditionnant par $(Z = n)$, donner la loi de X puis celle de Y.

c. Déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (*indication : calculer* $V(X+Y)$ *de deux façons différentes*). X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi du couple (X,Y).

7. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et T des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *en probabilité* vers T si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|T_n - T| \geq \varepsilon) = 0 .$$

On admettra qu'alors, la limite T est presque sûrement unique en ce sens que si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers T et vers T', alors T et T' sont presque sûrement égales.

De la même façon, on dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *en moyenne* vers T si pour tout entier n, la variable aléatoire possède une espérance, et si :

$$\lim_{n\to+\infty} E(|T_n - T|) = 0 .$$

a. Prouver que la convergence en moyenne entraîne la convergence en probabilité.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

b. Calculer $P(Y_n \neq 0)$, comparer pour $\varepsilon > 0$ les évènements $(Y_n > \varepsilon)$ et $(Y_n \neq 0)$, et en déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.

Montrer que si (Y_n) convergeait en moyenne vers Y, on aurait $P(Y = 0) = 1$.

Conclure (on utilisera l'inégalité $E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n) - E(Y)$, après l'avoir justifiée *of course* !).

8. Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On appelle *fonction de répartition* de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que pour tout réel x on ait $F_X(x) = P(X \leq x)$.

a. Montrer que F_X est croissante.

b. Prouver que $\forall a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

c. Déterminer les limites de F_X en $+\infty$ et $-\infty$ (on pourra écrire $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]$).

d. Montrer que la fonction F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Quels sont ses points de discontinuité ?

e. Connaissant F_X, comment déterminer la loi de X ?

9. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k ,$$

où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère alors les variables aléatoires $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

a. Déterminer la loi du couple (U,V).

b. Déterminer les lois marginales de U et de V.

c. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.

c. U et V sont-elles indépendantes ?